



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

**FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

Aproximaciones de Galerkin discontinuo con divergencia nula para el Sistema de Boussinesq estacionario.

Tesis presentada al Programa de Magíster en Matemática, con menciones, para optar al grado académico de Magíster en Matemática con Mención en Matemática Aplicada de la Universidad del Bío-Bío.

Francisco Javier Piña López

Concepción, mayo de 2021.

Aproximaciones de Galerkin discontinuo con divergencia nula para el
Sistema de Boussinesq estacionario.

por

Francisco Javier Piña López

Comisión examinadora:

Dr. Eligio Colmenares García
Profesor guía
Universidad del Bío-Bío, Chile

Dr. Ricardo Oyarzúa Vargas
Profesor co-guía
Universidad del Bío-Bío, Chile

Dr. Felipe Lepe Araya
Profesor Informante
Universidad del Bío-Bío

Dr. Mario Álvarez Guadamúz
Profesor Informante
Universidad de Costa Rica

Aproximaciones de Galerkin discontinuo con divergencia nula para el Sistema de Boussinesq estacionario.

Francisco Javier Piña López

Universidad del Bío-Bío.

Mayo, 2021.

Dedicatoria

... A Dios Padre, por estar presente en el camino al cual he sido llamado y por las oportunidades que he recibido de su Divina Providencia.

... A uno de los pilares que han hecho lo que soy, mi familia, padres y hermanas, a mi gente muy querida y que llevo en el corazón, por ser parte de quien soy hoy día, principalmente como persona.

... A mis profesores de la Universidad del Bío-Bío, principalmente a quien ha sido mi profesor guía, el señor Eligio Colmenares García por su vocación y entrega generosa, su calidad académica y calidez humana. A su vez, toda mi admiración por el profesor Ricardo Oyarzúa Vargas, quien ha sido importante en el postgrado, por su disposición para enseñar, ganas de crecer, amor por lo que hace y por ser un pilar fundamental en mi formación académica.

Resumen

En este trabajo presentamos y analizamos un esquema de elementos finitos que arroja aproximaciones de Galerkin discontinuo para las soluciones del sistema estacionario de Boussinesq para la simulación de fenómenos de flujo no isotérmicos. El modelo consiste en un sistema tipo Navier-Stokes, que describe la velocidad y la presión del fluido, acoplado con una ecuación de advección-difusión para la temperatura. El esquema numérico propuesto se basa en la técnica estándar de penalización interior y un enfoque de aproximación para los términos convectivos no lineales y emplea los elementos de divergencia conforme Brezzi-Douglas-Marini (BDM) de orden k para la velocidad, elementos discontinuos de orden $k - 1$ para la presión y elementos discontinuos de orden k para la temperatura. Resultados de existencia y unicidad se muestran y establecen rigurosamente, tanto para el esquema continuo, como para el discreto y se derivan estimaciones del error a priori, óptimas. Los ejemplos numéricos respaldan las tasas de convergencia teóricas esperadas, así como el buen comportamiento del modelo propuesto.

Palabras claves: Ecuaciones de Boussinesq, método de elementos finitos, método de Galerkin discontinuo, elementos de divergencia conforme, teoría de punto fijo, análisis del error a priori.

Abstract

In this work we present and analyze a finite element scheme yielding discontinuous Galerkin approximations to the solutions of the stationary Boussinesq system for the simulation of non-isothermal flow phenomena. The model consists of a Navier-Stokes type system, describing the velocity and the pressure of the fluid, coupled to an advection-diffusion equation for the temperature. The proposed numerical scheme is based on the standard interior penalty technique and an upwind approach for the nonlinear convective terms and employs the divergence-conforming Brezzi-Douglas-Marini (BDM) elements of order k for the velocity, discontinuous elements of order $k - 1$ for the pressure and discontinuous elements of order k for the temperature. Existence and uniqueness results are shown and stated rigorously for both the continuous problem and the discrete scheme, and optimal a priori error estimates are also derived. Numerical examples back up the theoretical expected convergence rates as well as the performance of the proposed technique.

Key words: Boussinesq equations, finite element methods, discontinuous Galerkin method, divergence-conforming elements, fixed-point theory, a priori error analysis.

Índice general

Dedicatoria	I
Resumen	II
Abstract	III
1. Introducción	1
2. El problema de Boussinesq y su formulación débil	5
2.1. El problema modelo	6
2.1.1. Notaciones y definiciones preliminares	6
2.1.2. El problema de Boussinesq estacionario: Formulaci3n fuerte y débil.	7
2.1.3. Propiedades de estabilidad.	10
2.1.4. Formulaci3n débil del problema	12
2.1.5. Estimados a priori.	13
2.1.6. Existencia de soluci3n.	16
3. Esquema de Galerkin discontinuo para el Sistema de Boussinesq.	25
3.0.1. Preliminares.	25
3.0.2. Esquema de elementos finitos de Galerkin discontinuo.	27
3.0.3. Estimaciones discretas y propiedades de estabilidad.	29
	IV

ÍNDICE GENERAL

3.0.4. Estimaciones a priori	32
3.0.5. Buen planteamiento del problema	33
4. Análisis de error a priori	41
4.1. Análisis del error a priori	41
5. Resultados numéricos	50
5.1. Ejemplo 1: un vórtice en el cuadrado unitario	51
5.2. Ejemplo 2: un caso de capa límite	53
5.3. Ejemplo 3: flujo estacionario en una cavidad cuadrada.	56

Capítulo 1

Introducción

Los flujos no isotérmicos se refieren a un proceso físico básico de flujos de fluidos con temperatura variable. Este proceso aparece con frecuencia y su investigación es de crucial relevancia en diversas situaciones de ingeniería y ciencias aplicadas que abarcan, por ejemplo, flujos geofísicos, atmosféricos y oceánicos, reactores químicos y nucleares, procesos de calentamiento y enfriamiento, entre muchos otros. La hipótesis de Boussinesq permite estudiar dichos flujos bajo el supuesto de que las variaciones en la densidad del fluido no tienen efecto sobre el campo de flujo, excepto que dan lugar a fuerzas de flotabilidad [7, 37].

El modelo matemático basado en la aproximación de Boussinesq para flujos no isotérmicos es un sistema que consta de las ecuaciones de Navier-Stokes (para describir la velocidad y presión del fluido) y una ecuación de advección-difusión (para modelar el campo de temperatura) acoplado mediante un término de flotabilidad y transferencia de calor por convección. Debido a su relevancia y complejidad, hasta ahora se han propuesto variadas técnicas para aproximar éste y otros modelos relacionados. (ver, e.g., [2–4, 6, 12, 13, 15–18, 21–23, 33–35, 38] y referencias de esto).

Hasta donde sabemos, [6] es el primer método desarrollado para este problema basa-

do en una formulación de elementos finitos primal. Aquí, se aplica la teoría de grado topológico para establecer resultados de existencia de soluciones y, a nivel discreto, se muestra que el uso de subespacios de elementos finitos de igual orden para la velocidad y la temperatura conduce a una convergencia óptima. Los mismos resultados se amplían, posteriormente en [18] usando una técnica de elementos finitos dual-mixta, empleando el Principio de Leray-Schauder y, a nivel discreto, espacios de elementos finitos compatibles con la condición inf-sup, construidos sobre triangulaciones con una estructura de macroelementos [29, 30]. En [2, 12, 23, 33–35, 38] se proponen otras técnicas primales, que incluyen estrategias basadas en proyecciones, adaptabilidad y aproximaciones de velocidad con divergencia nula, mientras que los trabajos [3, 4, 15–17, 21, 22] proponen esquemas de elementos finitos mixtos. Estas referencias consideran un modelo con parámetros constantes y/o dependientes de la temperatura y diferentes condiciones de contorno.

En particular, [33–35] proponen esquemas de divergencia conforme, basados en un método de Galerkin discontinuo para las ecuaciones de Navier-Stokes, que producen aproximaciones de velocidad con divergencia exactamente iguales a cero; una condición esencial de las ecuaciones gobernantes, ya que esto, particularmente, garantiza que las soluciones de las ecuaciones de flujo sean localmente conservativas en términos de estabilidad de energía (ver [10, 11, 32], para más detalles al respecto). Con respecto a la ecuación del calor, se realizan métodos primales estándar, mixto-primal (introduciendo un multiplicador de Lagrange) y mixto (introduciendo una variable vectorial adicional) formulaciones que han sido propuestas en el mismo. Resultados de existencia de soluciones han sido establecidas suponiendo que el dato Dirichlet de la temperatura es suficientemente pequeño, cuando se trata de una condición de Dirichlet no homogénea para esta variable. A su vez, la unicidad de soluciones débiles son garantizadas bajo supuestos de regularidad adicional y la unicidad de soluciones discretas queda como un problema abierto.

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, el objetivo de este trabajo es diseñar un nuevo método de elementos finitos para el problema de Boussinesq con las principales características de [18] and [34], es decir, que herede sus ventajas, desde el punto de vista teórico, computacional y físico. De esta manera, después de escribir el problema fuerte en su forma débil estándar, extendemos la propuesta usada en [18] para derivar, explícitamente, estimaciones a priori para soluciones en términos de datos, a través de un operador de extensión adecuado para el dato Dirichlet de la temperatura. Este último, nos permite establecer, entonces, un resultado de existencia de soluciones gracias al Principio de Leray-Schauder sin ninguna restricción sobre datos. Además, la unicidad se establece asumiendo datos suficientemente pequeños y no se necesita ninguna hipótesis de regularidad adicional.

Se desarrolla un esquema de Galerkin completamente discontinuo basado en la técnica estándar de penalización interior (esto es, tanto para las ecuaciones del fluido, como de la temperatura), tal como en [34]. Los subespacios de elementos finitos están dados por elementos de divergencia conforme Brezzi-Douglas-Marini (BDM) de orden k para la velocidad, y elementos discontinuos de orden $k - 1$ y k para la presión y la temperatura, respectivamente. Similarmente al caso continuo, mostramos resultados de existencia y unicidad de soluciones discretas y estimaciones del error a priori con orden óptimo. Además, debido a su construcción, el método produce una aproximación para la velocidad con divergencia nula.

El trabajo está estructurado como sigue. Comenzamos en la Sección 2.1.1 estableciendo algunas notaciones y definiciones preliminares para, luego, introducir en la Sección 2.1.2 las ecuaciones gobernantes, condiciones de frontera, suposiciones sobre datos así como la respectiva forma débil del problema. El respectivo análisis de solubilidad se lleva a cabo en la Sección 2.1.4. En toda la Sección 3 se introduce y analiza el problema discreto. La Sección 4.1 describe el análisis de error a priori. Finalmente,

se confirman las tasas de convergencia teórica y el buen comportamiento del modelo propuesto se ilustra en 5 con un par de ejemplos numéricos.

Capítulo 2

El problema de Boussinesq y su formulación débil

En este capítulo introduciremos nuestro problema modelo, lo escribiremos en su forma débil, discutiremos las propiedades de estabilidad de las formas involucradas, y revisaremos algunas propiedades teóricas que aseguran la existencia y unicidad de la solución.

En este capítulo se realiza el análisis continuo del Sistema de Boussinesq, que involucra estimaciones a priori y propiedades de estabilidad, las cuales se utilizan para el buen planteamiento del problema y posterior demostración de existencia y unicidad de solución.

2.1. El problema modelo

2.1.1. Notaciones y definiciones preliminares

El modelo que a considerar se establecerá en un dominio espacial, abierto y acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, con $d = 2$ o $d = 3$, con frontera poligonal en 2D y poilédrica en 3D Γ y vector exterior unitario normal \mathbf{n} . También, suponemos que $\Gamma_D, \Gamma_N \subseteq \Gamma$ satisfacen que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $|\Gamma_D| > 0$ y $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$. Se emplearán notaciones estándar para espacios de Lebesgue y de Sobolev. En particular, $W^{s,p}(\Omega)$ ($s \geq 0$) representa a todos los espacios de funciones de $L^p(\Omega)$ ($p \geq 1$) cuyas derivadas, en sentido distribucional, que llegan hasta el orden s , están en $L^p(\Omega)$, y sus respectivas normas y seminormas son denotadas por $\|\cdot\|_{s,p,\Omega}$ and $|\cdot|_{s,p,\Omega}$. Cuando $p = 2$, denotamos por $H^s(\Omega) := W^{s,2}(\Omega)$, $\|\cdot\|_{s,\Omega} := \|\cdot\|_{s,2,\Omega}$ y $|\cdot|_{s,\Omega} := |\cdot|_{s,2,\Omega}$, respectivamente. El caso $s = 1/2$ en el dominio Γ_D corresponde al espacio de trazas, denotado por $H^{1/2}(\Gamma_D)$, sobre Γ_D con norma definida como

$$\|\phi\|_{1/2,\Gamma_D} = \inf \{ \|\psi\|_{1,\Omega} : \psi \in H^1(\Omega), \psi|_{\Gamma_D} = \phi \}.$$

El espacio de funciones con traza cero sobre el subdominio $\Gamma_\star \subseteq \Gamma$, con $|\Gamma_\star| > 0$, será denotado por $H_{\Gamma_\star}^1(\Omega)$ (o $H_0^1(\Omega)$ cuando $\Gamma_\star = \Gamma$), para lo cual, gracias a la Desigualdad de Poincaré Generalizado, existe $C_{FP} > 0$ (dependiendo sólo de Ω y Γ_\star), tal que

$$\|\psi\|_{1,\Omega} \leq C_{FP} |\psi|_{1,\Omega} \quad \forall \psi \in H_{\Gamma_\star}^1(\Omega). \quad (2.1)$$

También, usaremos y denotaremos por $L_0^2(\Omega)$ al espacio de funciones de L^2 tales que su integral sobre Ω es cero. Asimismo, haremos referencia a los espacios de Hilbert

vectoriales como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) &:= \{ \mathbf{w} \in [L^2(\Omega)]^d : \operatorname{div} \mathbf{w} \in L^2(\Omega) \}, \\ \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) &:= \{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) : \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma \}, \\ \mathbf{H}_0(\operatorname{div}^0, \Omega) &:= \{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) : \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \text{ en } \Omega \}. \end{aligned}$$

Además, recordamos que el embebimiento de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ se cumple para $1 \leq q < \infty$ donde $d = 2$ y $1 \leq q \leq 6$ donde $d = 3$. En particular, existe una constante $C_{Sob}(q, d) > 0$, dependiendo sólo del dominio, tal que

$$\|\psi\|_{0,q,\Omega} \leq C_{Sob}(q, d) \|\psi\|_{1,\Omega} \quad \text{para} \quad \begin{cases} q \geq 1 & \text{si } d = 2, \\ q \in [1, 6] & \text{si } d = 3. \end{cases} \quad (2.2)$$

$\nabla \cdot := \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq n}$ denota el operador gradiente para campos escalares, mientras que los operadores gradiente, laplaciano y divergencia para un campo vectorial velocidad $\mathbf{v} = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ son denotados, respectivamente, por

$$\nabla \mathbf{v} := \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad \Delta \mathbf{v} := \operatorname{div}(\nabla \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2}, \quad \text{y} \quad \operatorname{div}(\mathbf{v}) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i},$$

2.1.2. El problema de Boussinesq estacionario: Formulación fuerte y débil.

Las ecuaciones para describir flujos estables impulsados térmicamente en un dominio Ω , usando la aproximación de Boussinesq, se describen como sigue. Encontrar la velocidad $\mathbf{u} = (u_i)_{1 \leq i \leq d} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$, la presión $p : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ y la temperatura

2.1. El problema modelo

$\theta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$\left. \begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \theta \mathbf{g} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ -\operatorname{div}(\mathbb{K} \nabla \theta) + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } \Omega, \quad (2.3)$$

donde $\nu > 0$ representa la viscosidad cinemática del fluido, $\mathbf{g} \in [L^2(\Omega)]^d$ es la aceleración debida a la gravedad y $\mathbb{K} \in [L^\infty(\Omega)]^{d \times d}$ es un tensor definido uniformemente positivo asociado a la conductividad térmica del fluido que satisface la propiedad

$$x \cdot \mathbb{K}x \geq k_0 |x|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \text{para algún } \kappa_0 > 0. \quad (2.4)$$

Las ecuaciones de la primera fila de (2.3) expresan el momentum y la consevación de masa, respectivamente y la última ecuación de la misma fila refuerza, particularmente, la divergencia nula restringida a la velocidad. El término $\theta \mathbf{g}$ que allí aparece describe el término de flotabilidad que impulsa el flujo del fluido. A su vez, la ecuación de convección-difusión que aparece en la segunda fila de (2.3) expresa la conservación de energía y describe la distribución de calor del fluido.

Para completar el sistema (2.3) necesitamos especificar, apropiadamente, condiciones de contorno. Para hacer esto, asumiremos que el fluido tiene velocidad cero sobre la frontera Γ (una condición de no deslizamiento/condición de Dirichlet homogénea para la velocidad del fluido), que su temperatura está dada en la frontera Γ_D (condición de Dirichlet no homogénea para la temperatura) y que no hay flujo de calor sobre Γ_N (una superficie aislada/condición de Neumann homogénea para la temperatura). Por lo tanto, denotando la temperatura como $\theta_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, llegamos a las siguientes condiciones físicas de frontera

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma, \quad \theta = \theta_D \quad \text{sobre } \Gamma_D \quad \text{and} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_N, \quad (2.5)$$

2.1. El problema modelo

Para lograr la formulación débil estándar de (2.3)-(2.5), multiplicamos las ecuaciones en (2.3) por apropiadas funciones de prueba $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d$, $q \in L_0^2(\Omega)$ y $\psi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$, respectivamente, integrando sobre el dominio, luego, usando la fórmula de integración por partes en los términos de difusión y, después, incorporando las condiciones de frontera (2.5), obtenemos la formulación variacional: Encontrar $(\mathbf{u}, p, \theta) \in [H_0^1(\Omega)]^d \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ con $\theta|_{\Gamma_D} = \theta_D$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathcal{C}^S(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathcal{B}^S(\mathbf{v}, p) &= \mathcal{D}^S(\theta, \mathbf{v}), \\ \mathcal{B}^S(\mathbf{u}, q) &= 0, \\ \mathcal{A}^T(\theta, \psi) + \mathcal{C}^T(\mathbf{u}; \theta, \psi) &= 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

para todo $(\mathbf{v}, q, \psi) \in [H_0^1(\Omega)]^d \times L_0^2(\Omega) \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$, donde las formas bilineales $\mathcal{A}^S : [H_0^1(\Omega)]^d \times [H_0^1(\Omega)]^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{A}^T : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ están definidas por

$$\mathcal{A}^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}, \quad \text{y} \quad \mathcal{A}^T(\theta, \psi) = \int_{\Omega} \mathbb{K} \nabla \theta \cdot \nabla \psi, \tag{2.7}$$

$\mathcal{B}^S : [H_0^1(\Omega)]^d \times L_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es la forma bilineal asociada al operador divergencia, a saber

$$\mathcal{B}^S(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v} \tag{2.8}$$

y $\mathcal{C}^S : [H_0^1(\Omega)]^d \times [H_0^1(\Omega)]^d \times [H_0^1(\Omega)]^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{C}^T : [H_0^1(\Omega)]^d \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ son las formas trilineales vinculadas a los términos convectivos y están dadas por

$$\mathcal{C}^S(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}, \quad \text{y} \quad \mathcal{C}^T(\mathbf{w}; \theta, \psi) = \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla \theta) \psi. \tag{2.9}$$

Finalmente, la forma $\mathcal{D}^s : H^1(\Omega) \times [H^1(\Omega)]^d \rightarrow \mathbb{R}$ está asociada al término de

flotabilidad y está definido por

$$\mathcal{D}^S(\theta, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \theta \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \quad (2.10)$$

2.1.3. Propiedades de estabilidad.

Mostraremos algunas propiedades de estabilidad de las formas definidas en la formulación variacional (2.6). Usando las definiciones y la Desigualdad de Cauchy-Schwarz, es fácil ver que las formas \mathcal{A}^S y \mathcal{A}^T definidas en (2.7) son acotadas en sus respectivos espacios satisfaciendo

$$\left| \mathcal{A}^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right| \leq \nu \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d \quad (2.11)$$

$$\left| \mathcal{A}^T(\theta, \psi) \right| \leq \|\mathbb{K}\|_{\infty,\Omega} \|\theta\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega} \quad \forall \theta, \psi \in H^1(\Omega) \quad (2.12)$$

Además, por la Desigualdad de Poincaré con constante $C_{\text{FP}} > 0$, (ver (2.1)) y por la propiedad (2.4), se sigue que

$$\mathcal{A}^S(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \nu |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 \geq \nu C_{\text{FP}} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d \quad (2.13)$$

$$\mathcal{A}^T(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \kappa_0 |\psi|_{1,\Omega}^2 \geq \kappa_0 C_{\text{FP}} \|\psi\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall \psi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega), \quad (2.14)$$

De este modo, las formas bilineales \mathcal{A}^S y \mathcal{A}^T son elípticas en $[H_0^1(\Omega)]^d$ y $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$, respectivamente. Además, por la Desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que la forma bilineal \mathcal{B}^S definida en (2.8) es claramente continua, esto es,

$$\left| \mathcal{B}^S(q, \mathbf{v}) \right| \leq \|q\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \forall \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d \quad (2.15)$$

2.1. El problema modelo

y satisface la condición inf-sup

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{B}^S(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}} \geq \beta \|q\|_{0,\Omega} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad (2.16)$$

para alguna constante positiva β , que sólo depende del dominio Ω , la cual viene del hecho de que el operador divergencia es un isomorfismo de \mathbf{X}^\perp a $L_0^2(\Omega)$ (y, por lo tanto, sobreyectivo), donde \mathbf{X} representa el kernel de \mathcal{B}^S (ver [26, Corolario I.2.4]), esto es,

$$\mathbf{X} = \left\{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d : \mathcal{B}^S(\mathbf{v}, q) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega) \right\} = \left\{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \right\}. \quad (2.17)$$

A su vez, con respecto a las formas trilineales \mathcal{C}^S y \mathcal{C}^T (cf. (2.9)), podemos usar la Desigualdad de Hölder y las estimaciones de Sobolev dadas por (2.2) para concluir que

$$\left| \mathcal{C}^S(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right| \leq \|\mathbf{w}\|_{0,q,\Omega} \|\nabla \mathbf{u}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{0,q',\Omega} \leq C \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \quad (2.18)$$

$$\left| \mathcal{C}^T(\mathbf{w}; \theta, \psi) \right| \leq \|\mathbf{w}\|_{0,q,\Omega} \|\nabla \theta\|_{0,\Omega} \|\psi\|_{0,q',\Omega} \leq C \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\theta\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega} \quad (2.19)$$

para todo $\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d$ y $\theta, \psi \in H^1(\Omega)$, donde q es consistente con la dimensión d de acuerdo con (2.2) y q' denota el respectivo conjugado de Hölder satisfaciendo $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{2}$. Adicionalmente, usando la fórmula de integración por partes, se sigue que tanto \mathcal{C}^S como \mathcal{C}^T son anti-simétricas con respecto a las últimas dos componentes cuando el primer argumento es de divergencia nula y tiene componente normal cero en la frontera, esto es,

$$\mathcal{C}^S(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\mathcal{C}^S(\mathbf{w}; \mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad \text{y} \quad \mathcal{C}^T(\mathbf{w}; \theta, \psi) = -\mathcal{C}^T(\mathbf{w}; \psi, \theta) \quad (2.20)$$

2.1. El problema modelo

para todo $\mathbf{w} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d$ y $\theta, \psi \in H^1(\Omega)$. En particular, considerando $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ y $\psi = \theta$ en (2.20)

$$\mathcal{E}^S(\mathbf{w}; \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{E}^T(\mathbf{w}; \psi, \psi) = 0, \quad (2.21)$$

para todo $\mathbf{w} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d$ y $\psi \in H^1(\Omega)$. Para la forma \mathcal{D}^S , usando la Desigualdad de Hölder y la Desigualdad de Sobolev (2.2) se sigue fácilmente que

$$\left| \mathcal{D}^S(\theta, \mathbf{v}) \right| \leq \|\theta\|_{0,q,\Omega} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{0,q',\Omega} \leq C \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\theta\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \quad (2.22)$$

2.1.4. Formulación débil del problema

En esta sección se mostrarán resultados de existencia y unicidad del problema (2.6). Como en la formulación estándar velocidad-presión de las ecuaciones de Navier-Stokes, notamos que la restricción de divergencia nula dada por la segunda ecuación de (2.6) implica que una eventual y respectiva solución \mathbf{u} debe pertenecer al kernel de la forma bilineal \mathcal{B}^S (definida en (2.17)) y, de este modo, este problema puede ser, de manera equivalente, reducido a \mathbf{X} , prescindiendo de la presión, gracias a la condición inf-sup (3.18). Por otra parte, para trabajar la condición de Dirichlet no homogénea en la temperatura, necesitamos introducir una extensión, la que denotaremos por, $\theta_1 \in H^1(\Omega)$ de $\theta_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ para la cual $\theta_0 = \theta - \theta_1 \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$. Considerando $\theta = \theta_0 + \theta_1$, observamos que el problema (2.6) es equivalente al problema reducido: Encontrar $(\mathbf{u}, \theta_0) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathcal{E}^S(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathcal{D}^S(\theta_0 + \theta_1, \mathbf{v}), \\ \mathcal{A}^T(\theta_0, \psi) + \mathcal{E}^T(\mathbf{u}; \theta_0, \psi) &= -\mathcal{A}^T(\theta_1, \psi) - \mathcal{E}^T(\mathbf{u}; \theta_1, \psi) \end{aligned} \quad (2.23)$$

para todo $(\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$. Inspirado por el enfoque empleado en [18], lo que sigue, ahora, es derivar estimaciones de solución a priori para el problema (2.23) (ver sección 2.1.5) las cuales ayudarán a probar que existe solución usando el Teorema Principio de Leray-Schauder. (ver sección 2.1.6).

2.1.5. Estimados a priori.

En esta sección derivaremos estimados a priori para soluciones débiles para el problema reducido (2.23). Antes de abordar esto, notemos del lado derecho de la segunda ecuación de (2.23) que una extensión θ_1 de θ_D está involucrada en los términos de difusión y convección de \mathcal{A}^T y \mathcal{C}^T , respectivamente. Por lo tanto, necesitamos definir correctamente la extensión θ_1 para conseguir cotas a priori de soluciones de manera explícita, en término de los datos y sin ninguna restricción (Teorema 2.1.2 abajo). El siguiente resultado permitirá cumplir este objetivo.

Lema 2.1.1. *Sea Ω un dominio acotado en \mathbb{R}^d , $d = 2$ o $d = 3$, con frontera Lipschitz continua. Entonces, para $\delta \in (0, 1)$ cualquiera, existe un operador de extensión $E_\delta : H^{1/2}(\Gamma_D) \rightarrow H^1(\Omega)$ tal que $\|E_\delta \psi\|_{0,3,\Omega} \leq C\delta \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}$ y $\|E_\delta \psi\|_{1,\Omega} \leq C\delta^{-4} \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}$ para todo $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$.*

Demostración. Ver [18, Lemma 3.2]. □

Teorema 2.1.2. *Sea (\mathbf{u}, θ_0) una solución para (2.23). Entonces, la siguiente estimación a priori se cumple*

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq C_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \quad y \quad \|\theta_0\|_{1,\Omega} \leq C_2(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}), \quad (2.24)$$

donde

$$C_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) = C \nu^{-5} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega}^5 (\kappa_0^{-1} \|\mathbb{K}\| + 1) \kappa_0^{-4} \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma}^5,$$

y

$$C_2(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) = C\nu^{-4}(k_0^{-1}\|\mathbb{K}\|_{\infty, \Omega} + 1)k_0^{-4}\|\mathbf{g}\|_{0, \Omega}^4\|\theta_D\|_{1/2, \Gamma_D}^5.$$

Demostración. Vamos a suponer que (\mathbf{u}, θ_0) es una solución para (2.23). Por lo tanto, considerando $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ y $\psi = \theta_0$, y usando las propiedades (2.20) y (2.21) de las formas trilineales \mathcal{C}^S y \mathcal{C}^T , respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^S(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \mathcal{D}^S(\theta_0 + \theta_1, \mathbf{u}), \\ \mathcal{A}^T(\theta_0, \theta_0) &= -\mathcal{A}^T(\theta_1, \theta_0) - \mathcal{C}^T(\mathbf{u}; \theta_1, \theta_0) = -\mathcal{A}^T(\theta_1, \theta_0) + \mathcal{C}^T(\mathbf{u}; \theta_0, \theta_1). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Usando la elipticidad de \mathcal{A}^S y la continuidad de la forma bilineal \mathcal{D}^s (ver (2.13) y (2.22)) en la primera ecuación de (2.25), tenemos que

$$\nu C_{\text{FP}} \|\mathbf{u}\|_{1, \Omega}^2 \leq C \|\mathbf{g}\|_{0, \Omega} \|\theta_0 + \theta_1\|_{1, \Omega} \|\mathbf{u}\|_{1, \Omega}$$

luego, simplificando y usando desigualdad triangular obtenemos

$$\|\mathbf{u}\|_{1, \Omega} \leq C\nu^{-1} \|\mathbf{g}\|_{0, \Omega} \left(\|\theta_0\|_{1, \Omega} + \|\theta_1\|_{1, \Omega} \right). \tag{2.26}$$

Por otra parte, usando la continuidad y la elipticidad de \mathcal{A}^T (ver (2.12) y (2.14)), la estimación (2.19) de la forma trilineal \mathcal{C}^T (con $q = 6$ y $q' = 3$) y, posteriormente, los embebimientos de Sobolev $H^1(\Omega)^d \hookrightarrow L^6(\Omega)^d$ y $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^3(\Omega)$ (ver (2.2)) en la segunda ecuación de (2.25), se sigue que

$$\begin{aligned} \kappa_0 C_{\text{FP}} \|\theta_0\|_{1, \Omega}^2 &\leq \|\mathbb{K}\|_{\infty, \Omega} \|\theta_0\|_{1, \Omega} \|\theta_1\|_{1, \Omega} + \|\mathbf{u}\|_{0, 6, \Omega} \|\nabla \theta_0\|_{0, \Omega} \|\theta_1\|_{0, 3, \Omega} \\ &\leq \|\mathbb{K}\|_{\infty, \Omega} \|\theta_0\|_{1, \Omega} \|\theta_1\|_{1, \Omega} + C \|\mathbf{u}\|_{1, \Omega} \|\theta_0\|_{1, \Omega} \|\theta_1\|_{0, 3, \Omega}, \end{aligned}$$

2.1. El problema modelo

Posteriormente, simplificando, obtenemos

$$\|\theta_0\|_{1,\Omega} \leq C\kappa_0^{-1} \left(\|\mathbb{K}\|_{\infty,\Omega} \|\theta_1\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\theta_1\|_{0,3,\Omega} \right). \quad (2.27)$$

Usando (2.27) en (2.26) obtenemos

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq C\nu^{-1} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \left[(\kappa_0^{-1} \|\mathbb{K}\|_{\infty,\Omega} + 1) \|\theta_1\|_{1,\Omega} + \kappa_0^{-1} \|\theta_1\|_{0,3,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \right]. \quad (2.28)$$

Así, definiendo $\theta_1 = E_\delta \theta_D \in H^1(\Omega)$ como la extensión de θ_D demostrada en 2.1.1 se satisface que

$$\|\theta_1\|_{0,3,\Omega} \leq C\delta \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma_D} \quad \text{y} \quad \|\theta_1\|_{1,\Omega} \leq C\delta^{-4} \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma_D}, \quad (2.29)$$

con $\delta \in (0, 1)$ tal que

$$C\nu^{-1} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \delta \kappa_0^{-1} \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma_D} = \frac{1}{2}, \quad (2.30)$$

de esta manera, deducimos la estimación a priori para \mathbf{u} usando (2.29) y (2.30) en la estimación preliminar (2.28) para obtener

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq C\delta^{-4} \nu^{-1} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} (\kappa_0^{-1} \|\mathbb{K}\| + 1) \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma_D}. \quad (2.31)$$

A su vez, reemplazando (2.31) en (2.27), obtenemos la respectiva estimación a priori para θ_0 , esto es,

$$\|\theta_0\|_{1,\Omega} \leq C\delta^{-4} (\kappa_0^{-1} \|\mathbb{K}\|_{\infty,\Omega} + 1) \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma_D}. \quad (2.32)$$

Finalmente, resolviendo (2.30) para δ y reemplazándola en (2.31) y (2.32) obtenemos la expresión explícita tanto para $C_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g})$ como para $C_2(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g})$ estableci-

das en (2.24).

□

2.1.6. Existencia de solución.

En esta sección demostraremos existencia de solución para el problema (2.23) usando un resultado, que es un caso especial del Principio de Leray-Schauder conocido como el Teorema de Schaefer. Lo enunciamos a continuación.

Teorema 2.1.3. *Sea X un espacio de Banach, $f : X \rightarrow X$ una función continua y compacta. Supongamos, además, que el conjunto*

$$\left\{ x \in X : x = \lambda f(x) \text{ para algún } \lambda \in [0, 1] \right\}$$

es acotado. Entonces f tiene un punto fijo.

Para poner el problema (2.23) en el contexto del Teorema (2.1.3), consideremos, primero, la versión linealizada definida como: Dado $(\mathbf{w}, \phi) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ y $\theta_1 = E_\delta \theta_D$, con $\delta > 0$ definido de acuerdo a (2.30), encontrar $(\mathbf{u}, \theta_0) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ satisfaciendo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathcal{C}^S(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathcal{D}^S(\phi + \theta_1, \mathbf{v}), \\ \mathcal{A}^T(\theta_0, \psi) + \mathcal{C}^T(\mathbf{w}; \theta_0, \psi) &= -\mathcal{A}^T(\theta_1, \psi) - \mathcal{C}^T(\mathbf{w}; \theta_1, \psi), \end{aligned} \tag{2.33}$$

o equivalentemente,

$$\mathcal{A}_{\mathbf{w}}((\mathbf{u}, \theta_0), (\mathbf{v}, \psi)) = \mathcal{F}_{(\mathbf{w}, \phi)}(\mathbf{v}, \psi) \quad \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{X} \times H_0^1(\Omega). \tag{2.34}$$

2.1. El problema modelo

donde,

$$\mathcal{A}_{\mathbf{w}}((\mathbf{u}, \theta_0), (\mathbf{v}, \psi)) = \mathcal{A}^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathcal{C}^S(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathcal{A}^T(\theta_0, \psi) + \mathcal{C}^T(\mathbf{w}; \theta_0, \psi) \quad (2.35)$$

y

$$\mathcal{F}_{(\mathbf{w}, \phi)}(\mathbf{v}, \psi) = \mathcal{D}^S(\phi + \theta_1, \mathbf{v}) - \mathcal{A}^T(\theta_1, \psi) - \mathcal{C}^T(\mathbf{w}; \theta_1, \psi) \quad (2.36)$$

para todo $(\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$. En segundo lugar, consideremos la familia de problemas de punto fijo: Encontrar $(\mathbf{w}, \psi) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ tal que

$$(\mathbf{w}, \phi) = \lambda \mathcal{L}(\mathbf{w}, \phi) \quad \text{para cada } \lambda \in [0, 1], \quad (2.37)$$

donde el operador

$$\begin{aligned} \lambda \mathcal{L} : \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \\ (\mathbf{w}, \phi) &\longmapsto (\mathbf{u}, \theta_0) := (\lambda \mathcal{L}_1(\mathbf{w}, \phi), \lambda \mathcal{L}_2(\mathbf{w}, \phi)) \end{aligned} \quad (2.38)$$

y donde $(\mathbf{u}, \theta_0) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ satisface

$$\mathcal{A}_{\mathbf{w}}((\mathbf{u}, \theta_0), (\mathbf{v}, \psi)) = \lambda \mathcal{F}_{(\mathbf{w}, \phi)}(\mathbf{v}, \psi) \quad \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega). \quad (2.39)$$

Como resultado, vemos que los problemas (2.34) y (2.37), con $\lambda = 1$, son, en efecto, equivalentes. El siguiente resultado establece que \mathcal{L} está bien definido.

Lema 2.1.4. *El operador \mathcal{L} (cf. (2.38)-(2.39)) está bien definido. Además, se cumple que*

$$\|\mathcal{L}(\mathbf{w}, \phi)\| \leq \frac{1}{C_{\mathcal{A}_{\mathbf{w}}}} \left\{ C_3(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \|(\mathbf{w}, \phi)\| + C_4(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \right\}, \quad (2.40)$$

para cualquier $(\mathbf{w}, \phi) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$, donde $C_{\mathcal{A}_{\mathbf{w}}}$, $C_3(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g})$ y $C_4(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g})$

2.1. El problema modelo

son las constantes especificadas en (2.42), (2.47) y (??) , respectivamente.

Demostración. Mostrar que \mathcal{L} está bien definido es equivalente a establecer que el problema (2.39) está bien definido. Sea $(\mathbf{w}, \phi) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ dado. Usando las estimaciones (2.11), (2.12), (2.18) y (2.19) y la Desigualdad de Cauchy-Schwarz , tenemos que $\mathcal{A}_{\mathbf{w}}$ es acotada como sigue

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_{\mathbf{w}}((\mathbf{u}, \theta_0), (\mathbf{v}, \psi))| &\leq |\mathcal{A}^S(\mathbf{u}, \mathbf{v})| + |\mathcal{C}^S(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})| + |\mathcal{A}^T(\theta_0, \psi)| + |\mathcal{C}^T(\mathbf{w}; \theta_0, \psi)| \\
&\leq \nu \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} + \|\mathbb{K}\|_{\infty,\Omega} \|\theta_0\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega} + C \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} + C \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\theta_0\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega} \\
&\leq C \max\{\nu, \|\mathbb{K}\|_{\infty,\Omega}, \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}\} (\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 + \|\theta_0\|_{1,\Omega}^2)^{1/2} (\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 + \|\psi\|_{1,\Omega}^2)^{1/2} \\
&\leq \|\mathcal{A}_{\mathbf{w}}\| \|(\mathbf{u}, \theta_0)\| \|(\mathbf{v}, \psi)\| ,
\end{aligned}$$

con constante positiva $\|\mathcal{A}_{\mathbf{w}}\| = C \max\{\nu, \|\mathbb{K}\|_{\infty,\Omega}, \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}\}$. Adicionalmente, gracias a la elipticidad de \mathcal{A}^S y \mathcal{A}^T (ver (2.13) y (2.14)) y a la propiedad de \mathcal{C}^S and \mathcal{C}^T al ser anti-simétricas en las últimas dos componentes (ver (2.21)), se cumple

$$\mathcal{A}_{\mathbf{w}}((\mathbf{v}, \psi), (\mathbf{v}, \psi)) \geq \nu C_{\text{FP}} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 + \kappa_0 C_{\text{FP}} \|\psi\|_{1,\Omega}^2 \geq C_{\mathcal{A}_{\mathbf{w}}} \|(\mathbf{v}, \psi)\|^2 \quad (2.41)$$

y así, $\mathcal{A}_{\mathbf{w}}$ es coerciva en $\mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ con constante

$$C_{\mathcal{A}_{\mathbf{w}}} = C \min\{\nu, \kappa_0\}. \quad (2.42)$$

Finalmente, con respecto al funcional lineal $\mathcal{F}_{(\mathbf{w}, \phi)}$, definido en (2.36), observamos que se puede reescribir como

$$\mathcal{F}_{(\mathbf{w}, \phi)}(\mathbf{v}, \psi) = \mathcal{F}_{1,(\mathbf{w}, \phi)}(\mathbf{v}, \psi) + \mathcal{F}_2(\mathbf{v}, \psi) \quad (2.43)$$

2.1. El problema modelo

donde

$$\mathcal{F}_{1,(\mathbf{w},\phi)}(\mathbf{v}, \psi) = \mathcal{D}^S(\phi, \mathbf{v}) - \mathcal{C}^T(\mathbf{w}; \theta_1, \psi) \quad (2.44)$$

y

$$\mathcal{F}_2(\mathbf{v}, \psi) = \mathcal{D}^S(\theta_1, \mathbf{v}) - \mathcal{A}^T(\theta_1, \psi). \quad (2.45)$$

Por lo tanto, usando tanto las estimaciones (2.19) y (2.22) como la estimación para θ_1 de acuerdo a (2.29) en la norma H^1 con δ dado respecto de (2.30), tenemos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{1,(\mathbf{w},\phi)}(\mathbf{v}, \psi)| &\leq |\mathcal{D}^S(\phi, \mathbf{v})| + |\mathcal{C}^T(\mathbf{w}; \theta_1, \psi)| \\ &\leq C (\|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\phi\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\theta_1\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega}) \\ &\leq C \max \{ \nu^{-4} \kappa_0^{-4} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega}^4 \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma_D}^5, \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \} (\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}^2 + \|\phi\|_{1,\Omega}^2)^{1/2} (\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 + \|\psi\|_{1,\Omega}^2)^{1/2} \\ &\leq C_3(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \|(\mathbf{w}, \phi)\| \|(\mathbf{v}, \psi)\| \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde

$$C_3(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) = C \max \{ \nu^{-4} \kappa_0^{-4} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega}^4 \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma_D}^5, \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \}. \quad (2.47)$$

A su vez, combinando, ahora, las estimaciones (2.12) y (2.22) y usando, nuevamente, la estimación para la $\|\theta_1\|_{1,\Omega}$ (como en la estimación anterior) obtenemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_2(\mathbf{v}, \psi)| &\leq |\mathcal{D}^S(\theta_1, \mathbf{v})| + |\mathcal{A}^T(\theta_1, \psi)| \leq C (\|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\theta_1\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} + \|\mathbb{K}\|_{\infty,\Omega} \|\theta_1\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega}) \\ &\leq C \nu^{-4} \kappa_0^{-4} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega}^4 \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma_D}^5 \max \{ \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega}, \|\mathbb{K}\|_{\infty,\Omega} \} (\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 + \|\psi\|_{1,\Omega}^2)^{1/2} \\ &\leq C_4(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \|(\mathbf{v}, \psi)\| \end{aligned}$$

donde $C_4(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) = C \nu^{-4} \kappa_0^{-4} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega}^4 \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma_D}^5 \max \{ \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega}, \|\mathbb{K}\|_{\infty,\Omega} \}$. De este

2.1. El problema modelo

modo, combinando las últimas dos estimaciones, obtenemos

$$|\mathcal{F}_{(\mathbf{w}, \phi)}(\mathbf{v}, \psi)| \leq C_3(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \|(\mathbf{w}, \phi)\| \|(\mathbf{v}, \psi)\| + C_4(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \|(\mathbf{v}, \psi)\|$$

y, por lo tanto, $\mathcal{F}_{(\mathbf{w}, \phi)} \in (\mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega))'$ con

$$\|\mathcal{F}_{(\mathbf{w}, \phi)}\| \leq C_3(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \|(\mathbf{w}, \phi)\| + C_4(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) .$$

Por el Lema de Lax-Milgram, para cualquier $(\mathbf{w}, \phi) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ existe una única $(\mathbf{u}, \theta_0) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ solución para (2.39) o, equivalentemente, tal que $\mathcal{L}(\mathbf{w}, \phi) = (\mathcal{L}_1(\mathbf{w}, \phi), \mathcal{L}_2(\mathbf{w}, \phi)) = (\mathbf{u}, \theta_0)$, lo que significa que el operador \mathcal{L} (cf. (2.38)) está bien definido. \square

El siguiente resultado establece propiedades claves del operador \mathcal{L} .

Lema 2.1.5. *El operador $\mathcal{L} : \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ definido por (2.38)-(2.39) es compacto. Además, el operador es localmente Lipschitz continuo, esto es, para todo $(\mathbf{w}, \phi), (\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\phi}) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$, se cumple que*

$$\|\mathcal{L}(\mathbf{w}, \phi) - \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\phi})\| \leq C_{\text{LIP}} \|(\mathbf{w}, \phi) - (\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\phi})\|, \quad (2.48)$$

con $C_{\text{LIP}} = C_{\mathcal{A}_{\mathbf{w}}}^{-1} C_3(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g})$ donde $C_{\mathcal{A}_{\mathbf{w}}} = C \min\{\nu, \kappa_0\}$ es la constante de coercividad de la forma bilineal $\mathcal{A}_{\mathbf{w}}$ (definida en (2.42)) y $C_3(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g})$ está dada por (2.47).

Demostración. Vamos a comenzar mostrando que el operador \mathcal{L} definido por (2.38)-(2.39) es compacto. Para esto demostraremos que la imagen $\{\mathcal{L}(w_n, \phi_n)\}_{n \geq 1}$ de cualquier sucesión $\{(w_n, \phi_n)\}_{n \geq 1} \subseteq \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ débilmente convergente a $(\mathbf{w}, \phi) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ es, en norma, fuertemente convergente a $\mathcal{L}(w, \phi)$. De acuerdo al lema

2.1. El problema modelo

2.1.4, sean $(\mathbf{u}_n, \theta_{0,n}), (\mathbf{u}, \theta_0) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ los únicos elementos que satisfacen

$$(\mathbf{u}_n, \theta_{0,n}) = \mathcal{L}(w_n, \phi_n) \quad \text{para cada } n \geq 1 \quad \text{y} \quad (\mathbf{u}, \theta_0) = \mathcal{L}(w, \phi). \quad (2.49)$$

Por lo tanto, aplicando la coercividad de $\mathcal{A}_{\mathbf{w}}$ con respecto a (2.41), su linealidad en la primera componente, la definición (2.39) de \mathcal{L} (con $\lambda = 1$ y $(\mathbf{v}, \psi) = (\mathbf{u}_n - \mathbf{u}, \theta_{0,n} - \theta_0)$) y, posteriormente, la definición de \mathcal{F}_1 definida en (2.44) y las estimaciones (2.19) y (2.22), con $q = q' = 4$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(w_n, \phi_n) - \mathcal{L}(w, \phi)\|^2 &= \|(\mathbf{u}_n, \theta_{0,n}) - (\mathbf{u}, \theta_0)\|^2 \\ &\leq C_{\mathcal{A}_{\mathbf{w}}}^{-1} A_{\mathbf{w}}((\mathbf{u}_n, \theta_{0,n}) - (\mathbf{u}, \theta_0), (\mathbf{u}_n, \theta_{0,n}) - (\mathbf{u}, \theta_0)) \\ &\leq C_{\mathcal{A}_{\mathbf{w}}}^{-1} \left\{ A_{\mathbf{w}}((\mathbf{u}_n, \theta_{0,n}), (\mathbf{u}_n - \mathbf{u}, \theta_{0,n} - \theta_0)) - A_{\mathbf{w}}((\mathbf{u}, \theta_0), (\mathbf{u}_n - \mathbf{u}, \theta_{0,n} - \theta_0)) \right\} \\ &= C_{\mathcal{A}_{\mathbf{w}}}^{-1} \mathcal{F}_{1,(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}, \phi_n - \phi)}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}, \theta_{0,n} - \theta_0) \\ &\leq C_{A_{\mathbf{w}}}^{-1} \left\{ \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\phi_n - \phi\|_{0,4,\Omega} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{0,4,\Omega} - \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{0,4,\Omega} \|\nabla\theta_1\|_{0,\Omega} \|\theta_{0,n} - \theta_0\|_{0,4,\Omega} \right\}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Ahora, dado que $(\mathbf{w}_n, \phi_n) \rightharpoonup (\mathbf{w}, \phi)$, se sigue que $\|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{0,4,\Omega} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ y $\|\phi_n - \phi\|_{0,4,\Omega} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ de acuerdo al Teorema de Rellich-Kondrachov. También, notemos que $(\mathbf{u}_n, \theta_{0,n})$ y (\mathbf{u}, θ_0) , que vienen de (2.49), satisfacen (2.40) y, por lo tanto, éstas son acotadas en sus respectivas normas, ya que $\{(\mathbf{w}_n, \phi_n)\}_{n \geq 1}$ es acotada, pues es débilmente convergente, como una consecuencia del Teorema de Banach-Steinhaus. En vista de estos hechos y de la estimación (2.50), podemos concluir que $\|\mathcal{L}(w_n, \phi_n) - \mathcal{L}(w, \phi)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ y, por lo tanto, \mathcal{L} es compacto.

En lo que sigue, para mostrar la propiedad de Lipschitz continuidad consideramos $(\mathbf{w}, \phi), (\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\phi}) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ y sea

$$(\mathbf{u}, \theta_0) = \mathcal{L}(w, \phi) \quad \text{y} \quad (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\theta}_0) = \mathcal{L}(\tilde{w}, \tilde{\phi}). \quad (2.51)$$

2.1. El problema modelo

Procediendo similarmente a (2.50) y usando (2.46) tenemos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(w, \phi) - \mathcal{L}(\tilde{w}, \tilde{\phi})\|^2 &\leq C_{\mathcal{A}_w}^{-1} \mathcal{F}_{1,(\mathbf{w}-\tilde{\mathbf{w}}, \phi-\tilde{\phi})}(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}, \theta_0 - \tilde{\theta}_0) \\ &\leq C_{\mathcal{A}_w}^{-1} C_3(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \|(\mathbf{w}, \phi) - (\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\phi})\| \|(\mathbf{u}, \theta_0) - (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\theta}_0)\|, \end{aligned} \quad (2.52)$$

y, después, usando (2.51) y simplificando, obtenemos (2.48). \square

En lo que sigue, mostraremos que el conjunto

$$\left\{ (\mathbf{u}, \theta_0) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega) : \quad (\mathbf{u}, \theta_0) = \lambda \mathcal{L}(\mathbf{u}, \theta_0) \quad \text{para } \lambda \in [0, 1] \right\}$$

es acotado. Equivalentemente, necesitamos mostrar que cualquier (punto fijo) solución (\mathbf{u}, θ_0) para (2.39) es uniformemente acotada con respecto a $\lambda \in [0, 1]$. Para hacer esto, observamos que, de acuerdo a la definición de \mathcal{L} , (\mathbf{u}, θ_0) debe satisfacer

$$\mathcal{A}_{\mathbf{u}}((\mathbf{u}, \theta_0), (\mathbf{v}, \psi)) = \lambda \mathcal{F}_{(\mathbf{u}, \theta_0)}(\mathbf{v}, \psi) \quad \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega).$$

En particular, usando la definición de \mathcal{A}_w y $\mathcal{F}_{(\mathbf{w}, \phi)}$, conforme a (2.35) y (2.36), con (\mathbf{u}, θ_0) en lugar de (\mathbf{w}, ϕ) , considerando $(\mathbf{v}, \psi) = (\mathbf{u}, \theta_0)$, usando la propiedad de \mathcal{C}^S y \mathcal{C}^T , antisimétricas en las últimas dos componentes, dada por (2.21) y desacoplando, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^S(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \lambda \mathcal{D}^S(\theta_0 + \theta_1, \mathbf{u}), \\ \mathcal{A}^T(\theta_0, \theta_0) &= -\lambda \mathcal{A}^T(\theta_1, \theta_0) - \lambda \mathcal{C}^T(\mathbf{u}; \theta_1, \theta_0) \end{aligned}$$

que coincide con (2.25) en el Teorema 2.1.2 salvo la constante multiplicativa λ de la parte derecha de sus expresiones y, por lo tanto, podemos deducir que

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq \lambda C \nu^{-1} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \left(\|\theta_0\|_{1,\Omega} + \|\theta_1\|_{1,\Omega} \right) \leq C \nu^{-1} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \left(\|\theta_0\|_{1,\Omega} + \|\theta_1\|_{1,\Omega} \right) \quad (2.53)$$

y

$$\begin{aligned} \|\theta_0\|_{1,\Omega} &\leq \lambda C\kappa_0^{-1} \left(\|\mathbb{K}\|_{\infty,\Omega} \|\theta_1\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\theta_1\|_{0,3,\Omega} \right) \\ &\leq C\kappa_0^{-1} \left(\|\mathbb{K}\|_{\infty,\Omega} \|\theta_1\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\theta_1\|_{0,3,\Omega} \right), \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde hemos usado el argumento que $0 \leq \lambda \leq 1$. Además, notemos que las estimaciones (2.53) y (2.54) son las mismas de (2.26) y (2.27), respectivamente, en el Teorema (2.1.2). Además, la extensión $\theta_1 = E_\delta \theta_D$ con $\delta > 0$ dada por (2.30), de acuerdo con lo indicado en la introducción del problema (2.33). Así, podemos proceder exactamente como en la demostración del Teorema 2.1.2 y obtener la misma estimación a priori para \mathbf{u} y θ_0 . Más precisamente, hemos mostrado el siguiente resultado.

Lema 2.1.6. *Sea (\mathbf{u}, θ_0) una solución para (2.38), entonces la siguiente estimación a priori se cumple*

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq C_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \quad \text{and} \quad \|\theta_0\|_{1,\Omega} \leq C_2(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}),$$

donde $C_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g})$ y $C_2(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g})$ son las constantes definidas en el Teorema (2.1.2).

En este punto, estamos en condiciones de establecer resultados de existencia de solución para el problema (2.23). En efecto, el lema 2.1.5 indica que el operador $\mathcal{L} : \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \longrightarrow \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ es continuo y compacto. Además, el lema (2.1.6) establece, esencialmente, que

$$\left\{ (\mathbf{u}, \theta_0) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \quad (\mathbf{u}, \theta_0) = \lambda \mathcal{L}(\mathbf{u}, \theta_0) \quad \text{for } \lambda \in [0, 1] \right\}$$

es acotado. Por lo tanto, el Teorema de Shaefer (ver Teorema 2.1.3) garantiza la existencia de un punto fijo $(\mathbf{u}, \theta_0) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ de \mathcal{L} . Esto es,

$$(\mathbf{u}, \theta_0) = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \theta_0)$$

y así, se satisface (2.34), es decir,

$$\mathcal{A}_{\mathbf{u}}((\mathbf{u}, \theta_0), (\mathbf{v}, \psi)) = \mathcal{F}_{(\mathbf{u}, \theta_0)}(\mathbf{v}, \psi) \quad \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{X} \times H_0^1(\Omega),$$

y, por lo tanto, (\mathbf{u}, θ_0) es una solución para (2.23). En virtud de lo anteriormente expuesto, establecemos el siguiente resultado.

Teorema 2.1.7. *Existe una solución (\mathbf{u}, θ_0) para (2.23).*

Tal como en [18], destacamos que el Teorema 2.1.7 garantiza la existencia de solución para (2.23) sin ninguna restricción sobre los datos (cf. [15–17]). Con respecto a la unicidad, supongamos que (\mathbf{u}, θ_0) y $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\theta}_0)$ son dos soluciones del problema (2.23) o, equivalentemente, son dos puntos fijos del operador \mathcal{L} . Con ayuda de la propiedad de Lipschitz continuidad de \mathcal{L} (cf. Lema (2.1.5)), tenemos que

$$\|\mathcal{L}(\mathbf{u}, \theta_0) - \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\theta}_0)\| = \|(\mathbf{u}, \theta_0) - (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\theta}_0)\| \leq C_{\text{LIP}} \|(\mathbf{u}, \theta_0) - (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\theta}_0)\|$$

Pero de acuerdo al Teorema 2.1.2 (ver también (2.42)) y (2.47)) C_{LIP} puede ser expresada explícitamente en término de los datos como

$$C_{\text{LIP}} = C_{\mathcal{A}_w}^{-1} C_3(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) = C \min\{\nu, \kappa_0\} C_3(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}). \quad (2.55)$$

Se sigue, entonces, que para datos suficientemente pequeños la solución es única. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado de unicidad.

Teorema 2.1.8. *Supongamos que los datos son suficientemente pequeños, para los cuales, la constante C_{LIP} (ver (2.55)) satisface $C_{\text{LIP}} < 1$. Entonces existe una única solución (\mathbf{u}, θ_0) para (2.23).*

Capítulo 3

Esquema de Galerkin discontinuo para el Sistema de Boussinesq.

En esta sección, presentamos y analizamos el esquema discreto basado en aproximaciones de Galerkin discontinuo y que proponemos para la solución numérica del problema (2.6). De esta manera, después de introducir algunas notaciones preliminares y definiciones en la Sección 3.0.1, establecemos y analizamos el esquema a lo largo de la Sección 3.0.2.

3.0.1. Preliminares.

Sea \mathcal{T}_h una partición regular de Ω , compuesta por elementos simpliciales K , donde K es un triángulo en 2D o un tetraedro en 3D, con un vector unitario normal apuntando hacia afuera \mathbf{n}_K y diámetro del elemento, h_K . Como es bien sabido, el tamaño de la malla está definido como $h := \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$. Por simplicidad, asumimos, además que si $\partial K \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ entonces $|\partial K \cap \Gamma_D| = 0$, o bien, $|\partial K \cap \Gamma_N| = 0$ y que la intersección de dos elementos es vacía, un vértice, un lado o una cara. El conjunto de lados/caras de la malla \mathcal{T}_h será denotada por $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^i \cup \mathcal{E}_h^b$, donde \mathcal{E}_h^i y

\mathcal{E}_h^b representan los conjuntos de todos(as) los(as) lados/caras interiores y de frontera, respectivamente, y $\mathcal{E}_{h,\Gamma_D}^b = \mathcal{E}_h^b \cap \Gamma_D$. Para cualquier lado/cara $e \in \mathcal{E}_h$, denotamos por h_e su respectivo $(d-1)$ -diámetro, esto es, su longitud en 2D o su diámetro máximo en 3D.

Los operadores de saltos y promedios que serán usados en las secciones siguientes se introducen a continuación. Primero, sea $e \in \mathcal{E}_h^i$ un lado/cara común de dos elementos vecinos $K^+, K^- \in \mathcal{T}_h$ satisfaciendo $e = \partial K^+ \cap \partial K^-$, y sea \mathbf{n}_e^\pm el vector unitario normal para e sobre K^\pm . Si ψ y \mathbf{v} son funciones a trozos, escalares o vectoriales, suficientemente regulares, sobre \mathcal{T}_h , respectivamente, denotamos por ψ^\pm y \mathbf{v}^\pm sus trazas tomadas desde el interior de K^\pm . Entonces, definimos el salto $[[\cdot]]$ actuando sobre ψ y \mathbf{v} como

$$[[\psi]] = \begin{cases} \psi^+ \mathbf{n}_e^+ + \psi^- \mathbf{n}_e^-, & e \in \mathcal{E}_h^i \\ \psi \mathbf{n}, & e \in \mathcal{E}_h^b \end{cases} \quad \text{y} \quad [[\mathbf{v}]] = \begin{cases} \mathbf{v}^+ \otimes \mathbf{n}_e^+ + \mathbf{v}^- \otimes \mathbf{n}_e^-, & e \in \mathcal{E}_h^i \\ \mathbf{v} \otimes \mathbf{n} & e \in \mathcal{E}_h^b \end{cases}$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario normal apuntando hacia afuera, para $\partial\Omega$. A su vez, para cualquier función a trozos (escalar, vectorial o tensorial) η definimos su promedio a través de $e \in \mathcal{E}_h^i$ como $\{\{\eta\}\} = \frac{1}{2}(\eta^+ + \eta^-)$ y $\{\{\eta\}\} = \eta$ si $e \in \mathcal{E}_h^b$.

Para $r \geq 0$, establecemos el espacio estándar de Sobolev a trozos

$$H^r(\mathcal{T}_h) = \{ \phi \in L^2(\Omega) : \phi|_K \in H^r(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \}. \quad (3.1)$$

y las normas a trozos dependiendo de la malla

$$\begin{aligned} \|\psi_h\|_{1,\mathcal{T}_h}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla_h \psi\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{a_0}{h_e} \|[[\psi]]\|_{0,e}^2 \quad \forall \psi \in H^1(\mathcal{T}_h) \\ \|\psi_h\|_{2,\mathcal{T}_h}^2 &= \|\psi_h\|_{1,\mathcal{T}_h}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 |\psi|_{2,K}^2 \quad \forall \psi \in H^2(\mathcal{T}_h), \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde ∇_h es el operador gradiente a trozos y a_0 es un parámetro fijo. Una desigualdad inversa permite garantizar la existencia de una constante positiva C , independiente del tamaño de la malla, tal que (ver [34, Sección 3.3.1]):

$$\|\psi_h\|_{2,\mathcal{T}_h} \leq C \|\psi_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \quad \forall \psi_h \in W_h. \quad (3.3)$$

También, recordamos la versión a trozos de los embebimientos de Sobolev (2.2) (ver e.g., [25, 39]): aquí, existe una constante $\tilde{C}_{Sob} > 0$ tal que

$$\|\psi\|_{0,q,\Omega} \leq \tilde{C}_{Sob} \|\psi\|_{1,\mathcal{T}_h} \quad \forall \psi \in H^1(\mathcal{T}_h), \quad \text{donde} \quad \begin{cases} q \geq 1 & \text{si } d = 2, \\ q \in [1, 6] & \text{si } d = 3. \end{cases} \quad (3.4)$$

Las respectivas versiones vectoriales de (3.1)-(3.4) son extendidas de forma natural.

3.0.2. Esquema de elementos finitos de Galerkin discontinuo.

Para una aproximación de orden $k \geq 1$ y una malla \mathcal{T}_h sobre Ω como en la sección (3.0.1), sea $P_k(K)$ el espacio local de polinomios de grado menor o igual a k sobre K . Consideramos los siguientes espacios de dimensión finita

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h &= \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_0(\text{div}; \Omega) : \quad \mathbf{v}_h|_K \in [P_k(K)]^d, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ Q_h &= \left\{ q_h \in L_0^2(\Omega) : \quad q_h|_K \in P_{k-1}(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ W_h &= \left\{ \psi_h \in L^2(\Omega) : \quad \psi_h|_K \in P_k(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Notemos que \mathbf{V}_h es el espacio de divergencia conforme de elementos de BDM [9]. En esta línea, basado en los espacios discretos (3.5), el método de elementos finitos completamente de Galerkin discontinuo, proponemos el siguiente problema (2.6) :

Encontrar $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \times W_h$, tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, p_h) &= \mathcal{D}^S(\theta_h, \mathbf{v}_h), \\ \mathcal{B}^S(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\mathcal{A}_h^T(\theta_h, \psi_h) + \mathcal{C}_h^T(\mathbf{u}_h; \theta_h, \psi_h) = \mathcal{D}_{\theta_D}^T(\psi_h),$$

para todo $(\mathbf{v}_h, q_h, \psi_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \times W_h$. Aquí, las formas bilineales discretas \mathcal{A}_h^S y \mathcal{A}_h^T que usamos están basadas en el Método de Penalización Interior Simétrica [5] y están dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \int_{\Omega} \nu \nabla_h \mathbf{u}_h : \nabla_h \mathbf{v}_h - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{ \{ \nu \nabla_h \mathbf{u}_h \} \} : \llbracket \mathbf{v}_h \rrbracket \\ &\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{ \{ \nu \nabla_h \mathbf{v}_h \} \} : \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{a_0}{h_e} \int_e \nu \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket : \llbracket \mathbf{v}_h \rrbracket, \end{aligned} \quad (3.7)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^T(\theta_h, \psi_h) &= \int_{\Omega} \mathbb{K} \nabla_h \theta_h \cdot \nabla_h \psi_h - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i \cup \mathcal{E}_{h, \Gamma_D}^b} \int_e \{ \{ \mathbb{K} \nabla_h \theta_h \} \} \cdot \llbracket \psi_h \rrbracket \\ &\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i \cup \mathcal{E}_{h, \Gamma_D}^b} \int_e \{ \{ \mathbb{K} \nabla_h \psi_h \} \} \cdot \llbracket \theta_h \rrbracket + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i \cup \mathcal{E}_{h, \Gamma_D}^b} \frac{a_0}{h_e} \int_e \llbracket \theta_h \rrbracket \cdot \llbracket \psi_h \rrbracket, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde a_0 es el parámetro de penalización interior suficientemente grande para que \mathcal{A}_h^S y \mathcal{A}_h^T sean coercivas. A su vez, las formas trilineales asociadas a los términos convectivos, no lineales, basadas en el enfoque de [31], están definidas por

$$\mathcal{C}_h^S(\mathbf{w}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} (\mathbf{w}_h \cdot \nabla_h) \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K \setminus \Gamma} (\mathbf{w}_h \cdot \mathbf{n}_K - |\mathbf{w}_h \cdot \mathbf{n}_K|) (\mathbf{u}_h^e - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{v}_h,$$

y

$$\mathcal{C}_h^T(\mathbf{w}_h; \theta_h, \psi_h) = \int_{\Omega} (\mathbf{w}_h \cdot \nabla_h \theta_h) \psi_h + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K \setminus \Gamma} (\mathbf{w}_h \cdot \mathbf{n}_K - |\mathbf{w}_h \cdot \mathbf{n}_K|) (\theta_h^e - \theta_h) \psi_h,$$

donde \mathbf{u}_h^e y θ_h^e representan las trazas de \mathbf{u}_h y θ_h , respectivamente, tomadas dentro del exterior de K . Finalmente, el funcional $\mathcal{D}_{\theta_D}^T$ está definido por

$$\mathcal{D}_{\theta_D}^T(\psi_h) = \sum_{e \in \mathcal{E}_{h, \Gamma_D}^b} \int_e \left(\frac{a_0}{h_e} \psi_h - \mathbb{K} \nabla_h \psi_h \cdot \mathbf{n} \right) \theta_D. \quad (3.9)$$

La forma bilineal \mathcal{B}^S y el funcional lineal \mathcal{D}^S son definidos por (2.8) y (2.10), respectivamente.

3.0.3. Estimaciones discretas y propiedades de estabilidad.

En este punto se establecen propiedades clave de las formas definidas para el esquema (3.6) requeridas para el análisis discreto. Su demostración puede encontrarse

en los trabajos previos [25, 34, 35] y, por lo tanto, aquí lo omitimos.

$$\left| \mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \right| \leq \tilde{C}_{\mathcal{A}^S} \|\mathbf{u}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\mathbf{v}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (3.10)$$

$$\left| \mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \right| \leq \hat{C}_{\mathcal{A}^S} \|\mathbf{u}\|_{2, \mathcal{T}_h} \|\mathbf{v}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \quad \forall \mathbf{u} \in [H^2(\mathcal{T}_h)]^n \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (3.11)$$

$$\left| \mathcal{A}_h^T(\theta_h, \psi_h) \right| \leq \tilde{C}_{\mathcal{A}^T} \|\theta_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\psi_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \quad \forall \theta_h, \psi_h \in W_h, \quad (3.12)$$

$$\left| \mathcal{A}_h^T(\theta, \psi_h) \right| \leq \hat{C}_{\mathcal{A}^T} \|\theta\|_{2, \mathcal{T}_h} \|\psi_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \quad \forall \theta \in H^2(\mathcal{T}_h) \quad \forall \psi_h \in W_h, \quad (3.13)$$

$$\left| \mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, q) \right| \leq \tilde{C}_{\mathcal{B}^S} \|\mathbf{v}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|q\|_{0, \Omega} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad (3.14)$$

$$\left| \mathcal{C}_h^S(\mathbf{w}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \right| \leq \tilde{C}_{\mathcal{C}^S} \|\mathbf{w}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\mathbf{v}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \quad \forall \mathbf{w}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (3.15)$$

$$\left| \mathcal{C}_h^T(\mathbf{w}_h; \theta_h, \psi_h) \right| \leq \tilde{C}_{\mathcal{C}^T} \|\mathbf{w}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\theta_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\psi_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h \quad \forall \theta_h, \psi_h \in W_h. \quad (3.16)$$

También, es sabido que para un parámetro a_0 , suficientemente grande, las formas bilineales \mathcal{A}_h^S y \mathcal{A}_h^T son coercivas. más precisamente, existen constantes positivas, independientes de h , $\tilde{\alpha}_S$ y $\tilde{\alpha}_T$ tales que

$$\mathcal{A}_h^S(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \tilde{\alpha}_S \|\mathbf{v}_h\|_{1, \mathcal{T}_h}^2 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad \text{y} \quad \mathcal{A}_h^T(\psi_h, \psi_h) \geq \tilde{\alpha}_T \|\psi_h\|_{1, \mathcal{T}_h}^2 \quad \forall \psi_h \in W_h \quad (3.17)$$

Con respecto a las forma bilineal \mathcal{B}^S , recordamos de [27] la condición inf-sup discreta: existe una constante $\tilde{\beta} > 0$, independiente de h , tal que

$$\sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1, \mathcal{T}_h}} \geq \tilde{\beta} \|q_h\|_{0, \Omega} \quad \forall q_h \in Q_h, \quad (3.18)$$

Como en el caso continuo, definimos el kernel discreto \mathbf{X}_h de la forma bilineal \mathcal{B}^S como

$$\mathbf{X}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h : \mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, q_h) = 0, \forall q_h \in Q_h \right\} = \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h : \operatorname{div} \mathbf{v}_h = 0 \text{ en } \Omega \right\}, \quad (3.19)$$

donde la última igualdad se sigue del hecho que $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{H}_0(\operatorname{div}; \Omega)$ y $\operatorname{div} \mathbf{V}_h \subset Q_h$ (ver [?]). Esta particularidad implica que $\mathbf{X}_h \subset \mathbf{H}_0(\operatorname{div}^0; \Omega)$. Y, ciertamente, de acuerdo a [34] tenemos que

$$\mathcal{C}_h^S(\mathbf{w}_h; \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e |\mathbf{w}_h \cdot \mathbf{n}_e| |[[\mathbf{v}_h]]| \geq 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}^0; \Omega), \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (3.20)$$

$$\mathcal{C}_h^T(\mathbf{w}_h; \psi_h, \psi_h) = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e |\mathbf{w}_h \cdot \mathbf{n}_e| |[[\psi_h]]| \geq 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}^0; \Omega), \forall \psi_h \in W_h. \quad (3.21)$$

Notar, además, que las formas convectivas \mathcal{C}_h^S y \mathcal{C}_h^T no son lineales en su primer argumento. Sin embargo, éstas satisfacen la siguiente propiedad de Lipschitz continuidad: Para todo $\mathbf{w}_h, \tilde{\mathbf{w}}_h, \mathbf{u}_h \in [H^2(\mathcal{T}_h)]^d$, $\theta_h \in H^2(\mathcal{T}_h)$, $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ y $\psi_h \in W_h$, existen constantes positivas $\tilde{C}_{S,\text{LIP}}$ y $\tilde{C}_{T,\text{LIP}}$ que son independientes del tamaño de la malla, de modo que

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_h^S(\mathbf{w}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \mathcal{C}_h^S(\tilde{\mathbf{w}}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)| &\leq \tilde{C}_{S,\text{LIP}} \|\mathbf{w}_h - \tilde{\mathbf{w}}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\mathbf{v}_h\|_{1, \mathcal{T}_h}, \\ |\mathcal{C}_h^T(\mathbf{w}_h; \theta_h, \psi_h) - \mathcal{C}_h^T(\tilde{\mathbf{w}}_h; \theta_h, \psi_h)| &\leq \tilde{C}_{T,\text{LIP}} \|\mathbf{w}_h - \tilde{\mathbf{w}}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\theta_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\psi_h\|_{1, \mathcal{T}_h}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

En cuanto a las formas \mathcal{D}^S y $\mathcal{D}_{\theta_D}^T$ definidas en (2.10) y (3.9), fácilmente se tiene

que

$$\left| \mathcal{D}^S(\psi_h, \mathbf{v}_h) \right| \leq \tilde{C}_{\mathcal{D}^S} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\psi_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}, \quad \forall \psi_h \in W_h, \forall v_h \in \mathbf{V}_h, \quad (3.23)$$

$$\left| \mathcal{D}^S(\psi, \mathbf{v}_h) \right| \leq \hat{C}_{\mathcal{D}^S} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\psi\|_{2,\mathcal{T}_h} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}, \quad \forall \psi \in H^2(\mathcal{T}_h), \forall v_h \in \mathbf{V}_h, \quad (3.24)$$

$$\left| \mathcal{D}_{\theta_D}^T(\psi_h) \right| \leq \tilde{C}_{\mathcal{D}^T} \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma_D} \|\psi_h\|_{1,\mathcal{T}_h}, \quad \forall \psi_h \in W_h. \quad (3.25)$$

3.0.4. Estimaciones a priori

El problema reducido (2.23) a nivel discreto toma la siguiente forma: Encontrar $(\mathbf{u}_h, \theta_h) \in \mathbf{X}_h \times W_h$ tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \mathcal{D}^S(\theta_h, \mathbf{v}_h), \\ \mathcal{A}_h^T(\theta_h, \psi_h) + \mathcal{C}_h^T(\mathbf{u}_h; \theta_h, \psi_h) &= \mathcal{D}_{\theta_D}^T(\psi_h) \end{aligned} \quad (3.26)$$

para todo $(\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathbf{X}_h \times W_h$.

En lo que sigue, derivaremos estimaciones a priori para la solución discreta del problema (3.26).

Teorema 3.0.1. *Sea (\mathbf{u}_h, θ_h) una solución para el problema (3.26). Entonces, las siguientes estimaciones a priori se cumplen*

$$\|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq \tilde{C}_1(\theta_D, \mathbf{g}) \quad y \quad \|\theta_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq \tilde{C}_2(\theta_D), \quad (3.27)$$

donde

$$\tilde{C}_1(\theta_D, \mathbf{g}) = \frac{\tilde{C}_{\mathcal{D}^S} \tilde{C}_{\mathcal{D}^T}}{\tilde{\alpha}_S \tilde{\alpha}_T} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma_D} \quad y \quad \tilde{C}_2(\theta_D) = \frac{\tilde{C}_{\mathcal{D}^T}}{\tilde{\alpha}_T} \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma_D}. \quad (3.28)$$

Demostración. Supongamos que (\mathbf{u}_h, θ_h) es una solución para (3.26) y haciendo

$(\mathbf{v}_h, \psi_h) = (\mathbf{u}_h, \theta_h)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) &= \mathcal{D}^S(\theta_h, \mathbf{u}_h), \\ \mathcal{A}_h^T(\theta_h, \psi_h) + \mathcal{C}_h^T(\mathbf{u}_h; \theta_h, \theta_h) &= \mathcal{D}_{\theta_D}^T(\theta_h).\end{aligned}\tag{3.29}$$

Utilizando la elipticidad de las formas bilineales \mathcal{A}_h^S y \mathcal{A}_h^T (cf. (3.17)), la propiedad de no negatividad de las formas trilineales discretas \mathcal{C}_h^S y \mathcal{C}_h^T (cf. (3.20)-(3.21)), y la continuidad de \mathcal{D}^S y $\mathcal{D}_{\theta_D}^T$ (cf. (3.23)-(3.25)) inmediatamente obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_S \|\mathbf{u}_h\|_{1, \mathcal{T}_h}^2 &\leq \tilde{C}_{\mathcal{D}^S} \|\mathbf{g}\|_{0, \Omega} \|\theta_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}_h\|_{1, \mathcal{T}_h}, \\ \tilde{\alpha}_T \|\theta_h\|_{1, \mathcal{T}_h}^2 &\leq \tilde{C}_{\mathcal{D}^T} \|\theta_D\|_{1/2, \Gamma_D} \|\theta_h\|_{1, \mathcal{T}_h}.\end{aligned}\tag{3.30}$$

Las estimaciones de (3.27) se obtienen simplificando y usando las cotas obtenidas de $\|\theta_h\|_{1, \mathcal{T}_h}$ para \mathbf{u}_h , con constantes $\tilde{C}_1(\theta_D, \mathbf{g})$ y $\tilde{C}_2(\theta_D)$ definidas como en (3.28). \square

3.0.5. Buen planteamiento del problema

Para establecer existencia de solución a nivel discreto, similarmente al caso continuo, definimos, primero, el conjunto cerrado $\mathbf{B}_h \subset \mathbf{X}_h \times W_h$ definido por

$$\mathbf{B}_h := \left\{ (\mathbf{w}_h, \phi_h) \in \mathbf{X}_h \times W_h : \|\mathbf{w}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \leq \tilde{C}_1(\theta_D, \mathbf{g}) \quad \text{y} \quad \|\phi_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \leq \tilde{C}_2(\theta_D) \right\}\tag{3.31}$$

donde $\tilde{C}_1(\theta_D, \mathbf{g})$ y $\tilde{C}_2(\theta_D)$ son las constantes dadas por (3.28). En segundo lugar, consideramos la versión linealizada de (3.26): Dada $(\mathbf{w}_h, \phi_h) \in \mathbf{B}_h$, encontrar $(\mathbf{u}_h, \theta_h) \in \mathbf{B}_h$ satisfaciendo

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{C}_h^S(\mathbf{w}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \mathcal{D}^S(\phi_h, \mathbf{v}_h), \\ \mathcal{A}_h^T(\theta_h, \psi_h) + \mathcal{C}_h^T(\mathbf{w}_h; \theta_h, \psi_h) &= \mathcal{D}_{\theta_D}^T(\psi_h),\end{aligned}\tag{3.32}$$

para todo $(\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathbf{B}_h$, o equivalentemente,

$$\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}((\mathbf{u}_h, \theta_h), (\mathbf{v}_h, \psi_h)) = \mathcal{F}_{\phi_h}(\mathbf{v}_h, \psi_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathbf{B}_h. \quad (3.33)$$

donde,

$$\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}((\mathbf{u}_h, \theta_h), (\mathbf{v}_h, \psi_h)) = \mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{C}_h^S(\mathbf{w}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{A}_h^T(\theta_h, \psi_h) + \mathcal{C}_h^T(\mathbf{w}_h; \theta_h, \psi_h) \quad (3.34)$$

y

$$\mathcal{F}_{\phi_h}(\mathbf{v}_h, \psi_h) = \mathcal{D}^S(\phi_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{D}_{\theta_D}^T(\psi_h) \quad (3.35)$$

para todo $(\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathbf{X}_h \times W_h$. En este camino, la familia de problemas de punto fijo a considerar está dada por: Encontrar $(\mathbf{w}_h, \psi_h) \in \mathbf{B}_h$ tal que

$$(\mathbf{w}_h, \phi_h) = \lambda \mathcal{L}_h(\mathbf{w}_h, \phi_h) \quad \text{for each } \lambda \in [0, 1], \quad (3.36)$$

donde el operador $\lambda \mathcal{L}_h$ está definido como

$$\begin{aligned} \lambda \mathcal{L}_h : \quad \mathbf{B}_h &\longrightarrow \mathbf{B}_h \\ (\mathbf{w}_h, \phi_h) &\longmapsto (\mathbf{u}_h, \theta_h) := (\lambda \mathcal{L}_{h,1}(\mathbf{w}_h, \phi_h), \lambda \mathcal{L}_{h,2}(\mathbf{w}_h, \phi_h)) \end{aligned} \quad (3.37)$$

y $(\mathbf{u}_h, \theta_h) \in \mathbf{B}_h$ satisfice

$$\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}((\mathbf{u}_h, \theta_h), (\mathbf{v}_h, \psi_h)) = \lambda \mathcal{F}_{\phi_h}(\mathbf{v}_h, \psi_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathbf{B}_h \quad (3.38)$$

Decimos, entonces, que los problemas (3.33) y (3.36) son equivalentes cuando $\lambda = 1$. Ciertamente, primero necesitamos ver que (3.33) está bien definido o, equivalentemente, \mathcal{L}_h está bien definido. En efecto, sea $(\mathbf{w}_h, \phi_h) \in \mathbf{B}_h$ (cf. (3.31)) y notemos que aplicando, de manera sencilla, las estimaciones discretas (3.10), (3.12), (3.15) y

(3.16) seguidas de la Desigualdad de Cauchy-Schwarz en la definición de $\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}$ (cf. (3.34)) obtenemos

$$\begin{aligned}
& \left| \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}((\mathbf{u}_h, \theta_h), (\mathbf{v}_h, \psi_h)) \right| \\
& \leq 2 \max \left\{ \tilde{C}_{\mathcal{A}^S}, \tilde{C}_{\mathcal{A}^T}, \tilde{C}_{\mathcal{C}^S} \|\mathbf{w}_h\|_{1, \mathcal{T}_h}, \tilde{C}_{\mathcal{C}^S} \|\mathbf{w}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \right\} \|(\mathbf{u}_h, \theta_h)\|_{1, \mathcal{T}_h} \|(\mathbf{v}_h, \psi_h)\|_{1, \mathcal{T}_h}, \\
& \leq \|\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}\| \|(\mathbf{u}_h, \theta_h)\|_{1, \mathcal{T}_h} \|(\mathbf{v}_h, \psi_h)\|_{1, \mathcal{T}_h}, \quad \forall (\mathbf{u}_h, \theta_h), (\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathbf{B}_h
\end{aligned} \tag{3.39}$$

donde $\|\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}\|$ es una constante independiente de h y

$$\|\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}\| = 2 \left(1 + \tilde{C}_1(\theta_D, \mathbf{g})\right) \max \left\{ \tilde{C}_{\mathcal{A}^S}, \tilde{C}_{\mathcal{A}^T}, \tilde{C}_{\mathcal{C}^S}, \tilde{C}_{\mathcal{C}^S} \right\}.$$

También, de (3.17), (3.20) y (3.21) deducimos que

$$\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}((\mathbf{v}_h, \psi_h), (\mathbf{v}_h, \psi_h)) \geq \tilde{\alpha} \|(\mathbf{v}_h, \psi_h)\|_{1, \mathcal{T}_h}^2 \quad \forall (\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathbf{B}_h, \tag{3.40}$$

donde $\tilde{\alpha} = \min\{\tilde{\alpha}_S, \tilde{\alpha}_T\}$. Además, $\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}$ es uniformemente continua y coerciva en \mathbf{B}_h . A su vez, usando la definición de \mathcal{F}_{ϕ_h} (cf. (3.35)) notamos que

$$\begin{aligned}
& \left| \mathcal{F}_{\phi_h}(\mathbf{v}_h, \psi_h) \right| \leq \max \left\{ \tilde{C}_{\mathcal{D}^S} \|\mathbf{g}\|_{0, \Omega} \|\phi_h\|_{1, \mathcal{T}_h}, \tilde{C}_F \|\theta_D\|_{1/2, \Gamma_D} \right\} \|(\mathbf{v}_h, \psi_h)\|_{1, \mathcal{T}_h} \\
& \leq \|\mathcal{F}_{\phi_h}\| \|(\mathbf{v}_h, \psi_h)\|_{1, \mathcal{T}_h} \quad \forall (\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathbf{B}_h,
\end{aligned} \tag{3.41}$$

donde $\|\mathcal{F}_{\phi_h}\|$ es la constante independiente de h dada por

$$\|\mathcal{F}_{\phi_h}\| = \left(1 + \tilde{C}_2(\theta_D)\right) \max \left\{ \tilde{C}_{\mathcal{D}^S} \|\mathbf{g}\|_{0, \Omega}, \tilde{C}_{\mathcal{D}^T} \|\theta_D\|_{1/2, \Gamma_D} \right\}.$$

y así, \mathcal{F}_{ϕ_h} es uniformemente acotada. Una aplicación sencilla del Lema de Lax-Milgram [20, Lema 1.4] permite establecer el siguiente resultado.

Lema 3.0.2. *El operador \mathcal{L}_h (cf. (3.37)-(3.38)) está bien definido. Además,*

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}_h, \theta_h)\|_{1, \mathcal{T}_h} &= \|(\mathcal{L}_{h,1}(\mathbf{w}_h, \phi_h), \mathcal{L}_{h,2}(\mathbf{w}_h, \phi_h))\|_{1, \mathcal{T}_h} \\ &\leq \frac{1}{\tilde{\alpha}} \left(1 + \tilde{C}_2(\theta_D)\right) \max\{\tilde{C}_{\mathcal{D}^S} \|\mathbf{g}\|_{0, \Omega}, \tilde{C}_{\mathcal{D}^T} \|\theta_D\|_{1/2, \Gamma_D}\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ahora, estableceremos la Lipschitz continuidad del operador \mathcal{L}_h .

Lema 3.0.3. *El operador $\mathcal{L}_h : \mathbf{B}_h \rightarrow \mathbf{B}_h$ definido por (3.37)-(3.38) es localmente Lipschitz continuo, esto es, para todo $(\mathbf{w}_h, \phi_h), (\tilde{\mathbf{w}}_h, \tilde{\phi}_h) \in \mathbf{B}_h$, se cumple*

$$\|\mathcal{L}_h(\mathbf{w}_h, \phi_h) - \mathcal{L}_h(\tilde{\mathbf{w}}_h, \tilde{\phi}_h)\|_{1, \mathcal{T}_h} \leq \tilde{C}_{\text{LIP}} \|(\mathbf{w}_h, \phi_h) - (\tilde{\mathbf{w}}_h, \tilde{\phi}_h)\|_{1, \mathcal{T}_h}, \quad (3.43)$$

con $\tilde{C}_{\text{LIP}} > 0$, independiente del tamaño de la malla, el cual es definido por

$$\tilde{C}_{\text{LIP}} = \frac{\sqrt{2}}{\tilde{\alpha}} \max\{\tilde{C}_{S, \text{LIP}} \tilde{C}_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}), \tilde{C}_{T, \text{LIP}} \tilde{C}_2(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}), \tilde{C}_{\mathcal{D}^S} \|\mathbf{g}\|_{0, \Omega}\} \quad (3.44)$$

donde $\tilde{\alpha}$ es la constante de coercividad de la forma bilineal $\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}$ (cf. (3.40)), $\tilde{C}_{S, \text{LIP}}$ y $\tilde{C}_{T, \text{LIP}}$ son las constantes de Lipschitz de las formas discretas \mathcal{C}_h^S y \mathcal{C}_h^T (cf. (3.22)), respectivamente, $\tilde{C}_{\mathcal{D}^S}$ es la constante que viene de (3.23) y $\tilde{C}_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g})$ y $\tilde{C}_2(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g})$ están dadas por (3.28).

Demostración. Sea $(\mathbf{w}_h, \phi_h), (\tilde{\mathbf{w}}_h, \tilde{\phi}_h) \in \mathbf{B}_h$, entonces, del Lema 3.0.2, sean $(\mathbf{u}_h, \theta_h), (\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\theta}_h) \in \mathbf{B}_h$ los únicos elementos que satisfacen

$$(\mathbf{u}_h, \theta_h) = \mathcal{L}(\mathbf{w}_h, \phi_h) \quad \text{y} \quad (\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\theta}_h) = \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{w}}_h, \tilde{\phi}_h). \quad (3.45)$$

Con respecto a la definición de \mathcal{L}_h , esto significa que (\mathbf{u}_h, θ_h) y $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\theta}_h)$ son las correspondientes soluciones para (3.33), y usando la definición de (3.34) y (3.35),

tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{E}_h^S(\mathbf{w}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{A}_h^T(\theta_h, \psi_h) + \mathcal{E}_h^T(\mathbf{w}_h; \theta_h, \psi_h) &= \mathcal{D}^S(\phi_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{D}_{\theta_D}^T(\psi_h) \\ \mathcal{A}_h^S(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{E}_h^S(\tilde{\mathbf{w}}_h; \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{A}_h^T(\tilde{\theta}_h, \psi_h) + \mathcal{E}_h^T(\tilde{\mathbf{w}}_h; \tilde{\theta}_h, \psi_h) &= \mathcal{D}^S(\tilde{\phi}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{D}_{\theta_D}^T(\psi_h). \end{aligned}$$

Restando ambas igualdades y realizando algunas manipulaciones algebraicas, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{E}_h^S(\mathbf{w}_h; \mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{A}_h^T(\theta_h - \tilde{\theta}_h, \psi_h) + \mathcal{E}_h^T(\mathbf{w}_h; \theta_h - \tilde{\theta}_h, \psi_h) \\ = -\mathcal{E}_h^S(\mathbf{w}_h; \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{E}_h^S(\tilde{\mathbf{w}}_h; \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) - \mathcal{E}_h^T(\mathbf{w}_h; \tilde{\theta}_h, \psi_h) + \mathcal{E}_h^T(\tilde{\mathbf{w}}_h; \tilde{\theta}_h, \psi_h) + \mathcal{D}^S(\phi_h - \tilde{\phi}_h, \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

Luego, de la definición de (3.34) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}((\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h, \theta_h - \tilde{\theta}_h), (\mathbf{v}_h, \psi_h)) &= -\mathcal{E}_h^S(\mathbf{w}_h; \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{E}_h^S(\tilde{\mathbf{w}}_h; \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) \\ &\quad - \mathcal{E}_h^T(\mathbf{w}_h; \tilde{\theta}_h, \psi_h) + \mathcal{E}_h^T(\tilde{\mathbf{w}}_h; \tilde{\theta}_h, \psi_h) + \mathcal{D}^S(\phi_h - \tilde{\phi}_h, \mathbf{v}_h), \quad \forall (\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathbf{B}_h. \end{aligned} \tag{3.46}$$

En particular, tomando $(\mathbf{v}_h, \psi_h) = (\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h, \theta_h - \tilde{\theta}_h)$ en (3.46), usando la coercividad de $\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}$ (cf. (3.40)) y las estimaciones (3.22) y (3.25) se sigue que

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} \|(\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h, \theta_h - \tilde{\theta}_h)\|_{1, \mathcal{T}_h}^2 &\leq \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}((\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h, \theta_h - \tilde{\theta}_h), (\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h, \theta_h - \tilde{\theta}_h)) \\ &\leq \left| \mathcal{E}_h^S(\tilde{\mathbf{w}}_h; \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h) - \mathcal{E}_h^S(\mathbf{w}_h; \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h) \right| + \left| \mathcal{E}_h^T(\tilde{\mathbf{w}}_h; \tilde{\theta}_h, \theta_h - \tilde{\theta}_h) - \mathcal{E}_h^T(\mathbf{w}_h; \tilde{\theta}_h, \theta_h - \tilde{\theta}_h) \right| \\ &\quad + \left| \mathcal{D}^S(\phi_h - \tilde{\phi}_h, \mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h) \right| \\ &\leq \tilde{C}_{S, \text{LIP}} \|\mathbf{w}_h - \tilde{\mathbf{w}}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} + \tilde{C}_{T, \text{LIP}} \|\mathbf{w}_h - \tilde{\mathbf{w}}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\tilde{\theta}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\theta_h - \tilde{\theta}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \\ &\quad + \tilde{C}_{\mathcal{D}^S} \|\mathbf{g}\|_{0, \Omega} \|\theta_h - \tilde{\theta}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}_h\|_{1, \mathcal{T}_h}. \end{aligned}$$

Luego, simplificando, obtenemos

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{L}_h(\mathbf{w}_h, \theta_h) - \mathcal{L}_h(\tilde{\mathbf{w}}_h, \tilde{\theta}_h)\|_{1, \mathcal{T}_h} = \|(\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h, \theta_h - \tilde{\theta}_h)\|_{1, \mathcal{T}_h} \\
& \leq \frac{\sqrt{2}}{\tilde{\alpha}} \max \{ \tilde{C}_{S, \text{LIP}} \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1, \mathcal{T}_h}, \tilde{C}_{T, \text{LIP}} \|\tilde{\theta}_h\|_{1, \mathcal{T}_h}, \tilde{C}_{\mathcal{D}^S} \|\mathbf{g}\|_{0, \Omega} \} \|(\mathbf{w}_h - \tilde{\mathbf{w}}_h, \theta_h - \tilde{\theta}_h)\|_{1, \mathcal{T}_h} \\
& \leq \tilde{C}_{\text{LIP}} \|(\mathbf{w}_h - \tilde{\mathbf{w}}_h, \theta_h - \tilde{\theta}_h)\|_{1, \mathcal{T}_h}
\end{aligned}$$

donde $\tilde{C}_{\text{LIP}} > 0$ es la constante independiente de h dada por (3.44) y obtenida de la última estimación, después, usando el hecho que $(\mathbf{u}_h, \theta_h) \in \mathbf{B}_h$ (cf. (3.31)). \square

Mostraremos, ahora, que para cualquier punto fijo del operador $\lambda \mathcal{L}_h$ (cf. (3.36)-(3.38)), con $0 \leq \lambda \leq 1$, el conjunto

$$\left\{ (\mathbf{u}_h, \theta_h) \in \mathbf{B}_h : \quad (\mathbf{u}_h, \theta_h) = \lambda \mathcal{L}_h(\mathbf{u}_h, \theta_h) \quad \text{for } \lambda \in [0, 1] \right\}$$

es uniformemente acotado (con respecto a λ). En efecto, con respecto a las definiciones de $\lambda \mathcal{L}_h$, $\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}$ y \mathcal{F}_{ϕ_h} (ver (3.38), (3.34) and (3.35), respectivamente), con (\mathbf{u}_h, θ_h) en lugar de (\mathbf{w}_h, ϕ_h) , deducimos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \lambda \mathcal{D}^S(\theta_h, \mathbf{v}_h), \\
\mathcal{A}_h^T(\theta_h, \psi_h) + \mathcal{C}_h^T(\mathbf{u}_h; \theta_h, \psi_h) &= \lambda \mathcal{D}_{\theta_D}^T(\psi_h),
\end{aligned}$$

para todo $(\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathbf{B}_h$. Así que, reemplazando aquí, $(\mathbf{v}_h, \psi_h) = (\mathbf{u}_h, \theta_h)$ y procediendo exactamente como en la derivación de las estimaciones (3.29)-(3.30) del Teorema 3.0.1 tendremos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_S \|\mathbf{u}_h\|_{1, \mathcal{T}_h}^2 &\leq \lambda \tilde{C}_{\mathcal{D}^S} \|\mathbf{g}\|_{0, \Omega} \|\phi_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \leq \tilde{C}_1(\theta_D, \mathbf{g}), \\
\tilde{\alpha}_T \|\theta_h\|_{1, \mathcal{T}_h}^2 &\leq \lambda \tilde{C}_{\mathcal{D}^T} \|\theta_D\|_{1/2, \Gamma_D} \|\theta_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \leq \tilde{C}_2(\theta_D).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

donde hemos usado el hecho de que $(\mathbf{u}_h, \theta_h) \in \mathbf{B}_h$ y que $\lambda \in (0, 1)$.

En resumen, los lemas 3.0.2 y 3.0.3 establecen que \mathcal{L}_h está bien definido y que es un operador continuo, respectivamente. Adicionalmente, (3.47), en específico, indica que cualquier punto fijo de $\lambda\mathcal{L}_h$ es uniformemente acotado con respecto a $\lambda \in (0, 1)$. Como resultado, dado que \mathcal{L}_h es compacto (pues éste es un operador de rango finito), el Teorema de Shaefer (cf. Teorema 2.1.3) nos garantiza que el operador \mathcal{L}_h tiene un punto fijo o, equivalentemente, el problema discreto (3.26) tiene una solución $(\mathbf{u}_h, \theta_h) \in \mathbf{B}_h \subset \mathbf{X}_h \times W_h$ (cf. (3.31)). A continuación, estableceremos estos hechos en el siguiente Teorema.

Teorema 3.0.4. *Existe una solución (\mathbf{u}_h, θ_h) para (3.26).*

Nuevamente, tal como en [18], destacamos que el Teorema 3.0.4 establece la existencia de solución para (3.26) sin ninguna restricción sobre los datos. Como en el caso continuo, además, podemos establecer unicidad de solución como una consecuencia directa de la propiedad de Lipschitz continuidad del operador \mathcal{L}_h . Si (\mathbf{u}_h, θ_h) y $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\theta}_h)$ son, ambas, soluciones diferentes para el problema (3.26), entonces se satisface que

$$(\mathbf{u}_h, \theta_h) = \mathcal{L}_h(\mathbf{u}_h, \theta_h) \quad \text{y} \quad (\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\theta}_h) = \mathcal{L}_h(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\theta}_h),$$

pero, gracias al Lema (3.0.3), se tiene que

$$\|\mathcal{L}_h(\mathbf{u}_h, \theta_h) - \mathcal{L}_h(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\theta}_h)\|_{1, \mathcal{T}_h} = \|(\mathbf{u}_h, \theta_h) - (\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\theta}_h)\|_{1, \mathcal{T}_h} \leq \tilde{C}_{\text{LIP}} \|(\mathbf{u}_h, \theta_h) - (\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\theta}_h)\|_{1, \mathcal{T}_h}$$

con \tilde{C}_{LIP} la constante definida por (3.44) y, explícitamente, depende de los datos y otras constantes, pero es independiente de h . Por lo tanto, para datos suficientemente pequeños, la solución es única. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado de unicidad.

Teorema 3.0.5. *Suponiendo que los datos son suficientemente pequeños, para los*

cuales, la constante \tilde{C}_{LIP} (see (3.44)) satisface que $\tilde{C}_{\text{LIP}} < 1$. Entonces, existe una única solución (\mathbf{u}_h, θ_h) para (3.26).

De manera similar al caso continuo, el valor de la presión discreta es una consecuencia de la condición de compatibilidad inf-sup (??) (ver [34, Lema 3.6], para más detalles).

$$[\mathbf{u} \otimes \mathbf{n}]_{i,j} = u_i n_j, \quad 1 \leq i, j \leq n. \text{ Para un lado (cara)}$$

Capítulo 4

Análisis de error a priori

En este capítulo procederemos a derivar las estimaciones de error a priori para el esquema numérico introducido y analizado en la Sección 3.

4.1. Análisis del error a priori

Sean (\mathbf{u}, p, θ) y $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h)$ soluciones para los problemas (2.6) and (3.6), respectivamente, cuya existencia está garantizada sin ninguna restricción de datos, de acuerdo al Teorema 2.1.7 y al Teorema 3.0.4 (ver también la parte final de la Sección 4 y Sección 3), respectivamente, y satisfacen las cotas a priori (2.24) y (3.27). Además, esas soluciones son únicas como se estableció en el Teorema 2.1.8 y el Teorema 3.0.5 suponiendo datos suficientemente pequeños para los cuales $C_{\text{LIP}} < 1$ y $\tilde{C}_{\text{LIP}} < 1$ (ver ecuaciones (2.55) y (3.44)).

En el próximo análisis, supondremos, además, un requerimiento de regularidad adicional

$$\mathbf{u} \in [H^{k+1}(\Omega)]^d \cap [H_0^1(\Omega)]^d \cap \mathbf{X}, \quad p \in H^k(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \quad \text{y} \quad \theta \in H^{k+1}(\Omega), \quad \text{for } k \geq 1. \quad (4.1)$$

4.1. Análisis del error a priori

De esta manera, cuando reemplazamos la solución exacta (\mathbf{u}, θ) en el problema discreto (3.6) nos encontramos con la propiedad de consistencia

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + \mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) &= \mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, p) + \mathcal{D}^S(\theta, \mathbf{v}_h), \\ \mathcal{A}_h^T(\theta, \psi_h) + \mathcal{C}_h^T(\mathbf{u}; \theta, \psi_h) &= \mathcal{D}_{\theta_D}^T(\psi_h),\end{aligned}\tag{4.2}$$

para todo $(\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathbf{V}_h \times W_h$, la cual, se sigue del hecho que los saltos desaparecen en los bordes, entre elementos, debido a la regularidad dada en (4.1), usando integración por partes y las ecuaciones (2.3). Entonces, combinando (4.2) con las respectivas relaciones discretas dadas por (3.6), obtenemos las propiedades de ortogonalidad de Galerkin

$$\mathcal{A}_h^S(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, p - p_h) - \mathcal{D}^S(\theta - \theta_h, \mathbf{v}_h) = 0\tag{4.3}$$

para todo $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, y

$$\mathcal{A}_h^T(\theta - \theta_h, \psi_h) + \mathcal{C}_h^T(\mathbf{u}; \theta, \psi_h) - \mathcal{C}_h^T(\mathbf{u}_h; \theta_h, \psi_h) = 0\tag{4.4}$$

para todo $\psi_h \in W_h$. Adicionalmente, establecemos a $\Pi_h^{\text{BDM}} \mathbf{u}$, $\Pi_h^{\text{L}^2} p$ y a $\Pi_h^{\text{L}^2} \theta$ como la proyección BDM de \mathbf{u} y las proyecciones de L^2 en Q_h para p y de L^2 en W_h para θ , y recordamos las siguientes propiedades de aproximación estándar (ver [9, 20]): existe una constante positiva C , independiente del tamaño de la malla, tal que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - \Pi_h^{\text{BDM}} \mathbf{u}\|_{2, \mathcal{T}_h} &\leq C h^k \|\mathbf{u}\|_{k+1, \Omega}, \\ \|p - \Pi_h^{\text{L}^2} p\|_{0, \Omega} &\leq C h^k \|p\|_{k, \Omega}, \\ \|\theta - \Pi_h^{\text{L}^2} \theta\|_{2, \mathcal{T}_h} &\leq C h^k \|\theta\|_{k+1, \Omega}.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Como es habitual, para obtener los errores de aproximación, los descomponemos

como la suma de un error de proyección y un error discreto, a saber,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_{\mathbf{u}} &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_h = (\mathbf{u} - \Pi_h^{\text{BDM}} \mathbf{u}) + (\Pi_h^{\text{BDM}} \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) =: \mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{\Pi} + \mathbf{e}_{\mathbf{u}}^h, \\
 \mathbf{e}_p &= p - p_h = (p - \Pi_h^{L^2} p) + (\Pi_h^{L^2} p - p_h) =: \mathbf{e}_p^{\Pi} + \mathbf{e}_p^h, \\
 \mathbf{e}_{\theta} &= \theta - \theta_h = (\theta - \Pi_h^{L^2} \theta) + (\Pi_h^{L^2} \theta - \theta_h) =: \mathbf{e}_{\theta}^{\Pi} + \mathbf{e}_{\theta}^h.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Así, de la desigualdad triangular, las propiedades de aproximación (4.5) y la desigualdad inversa (3.3), tenemos que

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{2, \mathcal{T}_h} &\leq \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{\Pi}\|_{2, \mathcal{T}_h} + \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^h\|_{2, \mathcal{T}_h} \leq Ch^k \|\mathbf{u}\|_{k+1, \Omega} + C \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^h\|_{1, \mathcal{T}_h}, \\
 \|\mathbf{e}_p\|_{0, \Omega} &\leq \|\mathbf{e}_p^{\Pi}\|_{0, \Omega} + \|\mathbf{e}_p^h\|_{0, \Omega} \leq Ch^k \|p\|_{k, \Omega} + C \|\mathbf{e}_p^h\|_{1, \mathcal{T}_h}, \\
 \|\mathbf{e}_{\theta}\|_{2, \mathcal{T}_h} &\leq \|\mathbf{e}_{\theta}^{\Pi}\|_{2, \mathcal{T}_h} + \|\mathbf{e}_{\theta}^h\|_{2, \mathcal{T}_h} \leq Ch^k \|\theta\|_{k+1, \Omega} + C \|\mathbf{e}_{\theta}^h\|_{1, \mathcal{T}_h},
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

lo que significa que la estimación de los errores de aproximación individuales $\mathbf{e}_{\mathbf{u}}$, \mathbf{e}_p and \mathbf{e}_{θ} se reducen para estimar los errores individuales discretos $\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^h$, \mathbf{e}_p^h and \mathbf{e}_{θ}^h en términos de las proyecciones del error $\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{\Pi}$, \mathbf{e}_p^{Π} y $\mathbf{e}_{\theta}^{\Pi}$ para mostrar una convergencia óptima. Con esto, estamos en condiciones de afirmar y probar el resultado principal de este capítulo.

Teorema 4.1.1. *Sean (\mathbf{u}, p, θ) y $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h)$ las soluciones de los problemas (2.6) y (3.6), respectivamente. Supongamos que los datos son suficientemente pequeños, para los cuales $C_{\text{LIP}} < 1$, $\tilde{C}_{\text{LIP}} < 1$, y $\tilde{\alpha} > 0$ (cf. ecuaciones (2.55), (3.44), y (4.15) abajo, respectivamente). Para $k \geq 1$, supongamos, además, que $\mathbf{u} \in [H^{k+1}(\Omega)]^d \cap [H_0^1(\Omega)]^d \cap \mathbf{X}$, $p \in H^k(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ y $\theta \in H^{k+1}(\Omega)$. Entonces, existe una constante*

4.1. Análisis del error a priori

$C > 0$, independiente de h , tal que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{2,\mathcal{T}_h} + \|\theta - \theta_h\|_{2,\mathcal{T}_h} &\leq C h^k \left(\|\mathbf{u}\|_{k+1,\Omega} + \|\theta\|_{k+1,\Omega} \right), \\ \|p - p_h\|_{0,\Omega} &\leq C h^k \left(\|p\|_{k,\Omega} + \|\mathbf{u}\|_{k+1,\Omega} + \|\theta\|_{k+1,\Omega} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Demostración. Comenzamos derivando una estimación para el error discreto de la velocidad. Primeramente, notamos de (4.6) y de la propiedad de ortogonalidad de Galerkin (4.3), con $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}$, que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^S(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) + \mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) &= \mathcal{B}^S(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, p - p_h) + \mathcal{D}^S(\theta - \theta_h, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) \\ + \mathcal{A}_h^S(\Pi_h^{\text{BDM}} \mathbf{u}, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) + \mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \Pi_h^{\text{BDM}} \mathbf{u}, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) &- \mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) - \mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Pero $\mathcal{B}^S(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, p - p_h) = 0$, ya que $\Pi_h^{\text{BDM}} \mathbf{u} \in \mathbf{X}$ de las propiedades del proyector BDM (ver [9], por ejemplo) y \mathbf{u}_h es de divergencia nula. A continuación, sumando y restando términos adecuados y reorganizándolos convenientemente, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^S(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) + \mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) &= \mathcal{D}^S(\theta - \theta_h, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) - \mathcal{A}_h^S(\mathbf{e}_h^{\Pi}, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) - \mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_h^{\Pi}, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) \\ + \left[\mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) - \mathcal{C}_h^S(\Pi_h^{\text{BDM}} \mathbf{u}_h; \mathbf{u}, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) \right] &+ \left[\mathcal{C}_h^S(\Pi_h^{\text{BDM}} \mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) - \mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ahora, en el lado izquierdo de (4.10) usamos la elipticidad de \mathcal{A}_h^S (cf. (3.17)) y la propiedad de no negatividad de \mathcal{C}_h^S (cf. (3.20)) y en el lado derecho empleamos las estimaciones discretas (3.24), (3.11) y (3.22) para obtener

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_S \|\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{1,\mathcal{T}_h}^2 &\leq \widehat{C}_{\mathcal{D}^S} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{e}_\theta\|_{2,\mathcal{T}_h} \|\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{1,\mathcal{T}_h} + \widehat{C}_{\mathcal{A}^S} \|\mathbf{e}_h^{\Pi}\|_{2,\mathcal{T}_h} \|\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{1,\mathcal{T}_h} \\ + \tilde{C}_{S,\text{LIP}} \left[\|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \|\mathbf{e}_h^{\Pi}\|_{1,\mathcal{T}_h} + \|\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{1,\mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}\|_{1,\mathcal{T}_h} + \|\mathbf{e}_h^{\Pi}\|_{1,\mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}\|_{1,\mathcal{T}_h} \right] &\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{1,\mathcal{T}_h}. \end{aligned}$$

Después, simplificando por $\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{1,\mathcal{T}_h}$, considerando que $\|\mathbf{e}_\theta\|_{2,\mathcal{T}_h} \leq \|\mathbf{e}_\theta^{\Pi}\|_{2,\mathcal{T}_h} + C \|\mathbf{e}_\theta^h\|_{1,\mathcal{T}_h}$ de acuerdo a (4.7), las estimaciones a priori (2.24) y (3.27) para \mathbf{u} y \mathbf{u}_h , respectiva-

4.1. Análisis del error a priori

mente, obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_S \| \mathbf{e}_{\mathbf{u}}^h \|_{1, \mathcal{T}_h} &\leq \widehat{C}_{\mathcal{G}^S} \| \mathbf{g} \|_{0, \Omega} \| \mathbf{e}_{\theta}^{\Pi} \|_{2, \mathcal{T}_h} + C \widehat{C}_{\mathcal{G}^S} \| \mathbf{g} \|_{0, \Omega} \| \mathbf{e}_{\theta}^h \|_{1, \mathcal{T}_h} + \widehat{C}_{\mathcal{A}^S} \| \mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{\Pi} \|_{2, \mathcal{T}_h} \\ &+ \widetilde{C}_{S, \text{LIP}} \left[\widetilde{C}_1(\theta_D, \mathbf{g}) \| \mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{\Pi} \|_{1, \mathcal{T}_h} + C_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \| \mathbf{e}_{\mathbf{u}}^h \|_{1, \mathcal{T}_h} + C_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \| \mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{\Pi} \|_{1, \mathcal{T}_h} \right], \end{aligned}$$

y asociando términos apropiadamente, deducimos que

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_S \| \mathbf{e}_{\mathbf{u}}^h \|_{1, \mathcal{T}_h} &\leq C \widehat{C}_{\mathcal{G}^S} \| \mathbf{g} \|_{0, \Omega} \| \mathbf{e}_{\theta}^h \|_{1, \mathcal{T}_h} + \widetilde{C}_{S, \text{LIP}} C_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \| \mathbf{e}_{\mathbf{u}}^h \|_{1, \mathcal{T}_h} \\ &+ \left[\widehat{C}_{\mathcal{A}^S} + \widetilde{C}_{S, \text{LIP}} \widetilde{C}_1(\theta_D, \mathbf{g}) + \widetilde{C}_{S, \text{LIP}} C_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \right] \| \mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{\Pi} \|_{2, \mathcal{T}_h} + \widehat{C}_{\mathcal{G}^S} \| \mathbf{g} \|_{0, \Omega} \| \mathbf{e}_{\theta}^{\Pi} \|_{2, \mathcal{T}_h}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para derivar una respectiva estimación para el error discreto asociado a la temperatura, procedemos de manera similar como en (4.9)-(4.11). En efecto, observamos, ahora, que de la propiedad de ortogonalidad de Galerkin (4.4) y \mathbf{e}_{θ}^h en lugar de ψ_h se cumple que

$$\mathcal{A}_h^T(\mathbf{e}_{\theta}^h, \mathbf{e}_{\theta}^h) + \mathcal{C}_h^T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_{\theta}^h, \mathbf{e}_{\theta}^h) = \mathcal{A}_h^T(\Pi_h^{L^2} \theta, \mathbf{e}_{\theta}^h) + \mathcal{C}_h^T(\mathbf{u}_h; \Pi_h^{L^2} \theta, \mathbf{e}_{\theta}^h) - \mathcal{A}_h^T(\theta, \mathbf{e}_{\theta}^h) - \mathcal{C}_h^T(\mathbf{u}; \theta, \mathbf{e}_{\theta}^h),$$

luego, sumando y restando términos, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^T(\mathbf{e}_{\theta}^h, \mathbf{e}_{\theta}^h) + \mathcal{C}_h^T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_{\theta}^h, \mathbf{e}_{\theta}^h) &= -\mathcal{A}_h^T(\mathbf{e}_{\theta}^{\Pi}, \mathbf{e}_{\theta}^h) - \mathcal{C}_h^T(\mathbf{u}; \theta - \theta_h, \mathbf{e}_{\theta}^h) + \mathcal{C}_h^T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_{\theta}^h, \mathbf{e}_{\theta}^h) \\ &+ \left[\mathcal{C}_h^T(\mathbf{u}_h; \theta_h, \mathbf{e}_{\theta}^h) - \mathcal{C}_h^T(\Pi_h^{\text{BDM}} \mathbf{u}; \theta_h, \mathbf{e}_{\theta}^h) \right] + \left[\mathcal{C}_h^T(\Pi_h^{\text{BDM}} \mathbf{u}; \theta_h, \mathbf{e}_{\theta}^h) - \mathcal{C}_h^T(\mathbf{u}; \theta_h, \mathbf{e}_{\theta}^h) \right]. \end{aligned}$$

Gracias a la elipticidad de \mathcal{A}_h^T y la propiedad de no negatividad de \mathcal{C}_h^T (cf. (3.17) y (3.21), respectivamente) así como las cotas (3.13) para \mathcal{A}_h^T y (3.22) para \mathcal{C}_h^T , el

4.1. Análisis del error a priori

hecho que $\|\cdot\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq \|\cdot\|_{2,\mathcal{T}_h}$ y, después, simplificando, deducimos que

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_T \|e_\theta^h\|_{1,\mathcal{T}_h} &\leq \widehat{C}_{\mathcal{A}^T} \|e_\theta^\Pi\|_{2,\mathcal{T}_h} + \tilde{C}_{T,\text{LIP}} \|\mathbf{u}\|_{1,\mathcal{T}_h} \left[\|e_\theta^\Pi\|_{2,\mathcal{T}_h} + \|e_\theta^h\|_{1,\mathcal{T}_h} \right] \\ &\quad + \tilde{C}_{T,\text{LIP}} \|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \|e_\theta^h\|_{1,\mathcal{T}_h} + \tilde{C}_{T,\text{LIP}} \|\theta_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \left[\|e_\mathbf{u}^\Pi\|_{2,\mathcal{T}_h} + \|e_\mathbf{u}^h\|_{1,\mathcal{T}_h} \right]. \end{aligned}$$

Entonces, usando las estimaciones a priori para \mathbf{u} , \mathbf{u}_h y θ_h proporcionadas por el Teorema 2.1.2 y el Teorema 3.0.1, se sigue que

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_T \|e_\theta^h\|_{1,\mathcal{T}_h} &\leq \left\{ \tilde{C}_{T,\text{LIP}} \left[C_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) + \tilde{C}_1(\theta_D, \mathbf{g}) \right] \right\} \|e_\theta^h\|_{1,\mathcal{T}_h} + \tilde{C}_{T,\text{LIP}} \tilde{C}_2(\theta_D) \|e_\mathbf{u}^h\|_{1,\mathcal{T}_h} \\ &\quad + \tilde{C}_{T,\text{LIP}} \tilde{C}_2(\theta_D) \|e_\mathbf{u}^\Pi\|_{2,\mathcal{T}_h} + \left[\widehat{C}_{\mathcal{A}^T} + \tilde{C}_{T,\text{LIP}} C_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \right] \|e_\theta^\Pi\|_{2,\mathcal{T}_h}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Establecemos las siguientes constantes, dependiendo sólo de datos y otras constantes, pero todas éstas independientes del tamaño de la malla h , definidas por

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) &:= C \widehat{C}_{\mathcal{D}^S} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} + \tilde{C}_{T,\text{LIP}} \left[C_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) + \tilde{C}_1(\theta_D, \mathbf{g}) \right] \\ \mathbf{C}_2(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) &:= \tilde{C}_{S,\text{LIP}} C_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) + \tilde{C}_{T,\text{LIP}} \tilde{C}_2(\theta_D) \\ \mathbf{C}_3(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) &:= \widehat{C}_{\mathcal{A}^S} + \tilde{C}_{S,\text{LIP}} \tilde{C}_1(\theta_D, \mathbf{g}) + \tilde{C}_{S,\text{LIP}} C_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) + \tilde{C}_{T,\text{LIP}} \tilde{C}_2(\theta_D) \\ \mathbf{C}_4(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) &:= \widehat{C}_{\mathcal{A}^T} + \tilde{C}_{T,\text{LIP}} C_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) + \widehat{C}_{\mathcal{D}^S} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \end{aligned} \quad (4.13)$$

encontramos, combinando (4.11) y (4.12) que

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_S \|e_\mathbf{u}^h\|_{1,\mathcal{T}_h} + \tilde{\alpha}_T \|e_\theta^h\|_{1,\mathcal{T}_h} &\leq \mathbf{C}_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \|e_\theta^h\|_{1,\mathcal{T}_h} + \mathbf{C}_2(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \|e_\mathbf{u}^h\|_{1,\mathcal{T}_h} \\ &\quad + \mathbf{C}_3(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \|e_\mathbf{u}^\Pi\|_{2,\mathcal{T}_h} + \mathbf{C}_4(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \|e_\theta^\Pi\|_{2,\mathcal{T}_h}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

y así, si los datos son lo suficientemente pequeños, para que las constantes $\mathbf{C}_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g})$

y $\mathbf{C}_2(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g})$ dadas por (4.13) satisfagan que

$$\tilde{\alpha} = \min \left\{ \tilde{\alpha}_T - \mathbf{C}_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}), \tilde{\alpha}_S - \mathbf{C}_2(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \right\} > 0, \quad (4.15)$$

podemos prescindir de los dos primeros términos de la derecha de la desigualdad (4.14) con ayuda de los términos de la izquierda y obtener la estimación del error discreto

$$\|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^h\|_{1, \mathcal{T}_h} + \|\mathbf{e}_{\theta}^h\|_{1, \mathcal{T}_h} \leq \tilde{\alpha}^{-1} \mathbf{C}_5(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \left[\|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{\Pi}\|_{2, \mathcal{T}_h} + \|\mathbf{e}_{\theta}^{\Pi}\|_{2, \mathcal{T}_h} \right] \quad (4.16)$$

donde la constante $\mathbf{C}_5(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g})$, definida como

$$\mathbf{C}_5(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) = \max \left\{ \mathbf{C}_3(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}), \mathbf{C}_4(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) \right\}, \quad (4.17)$$

Sólo depende de los datos y otras constantes, pero todas éstas, independientes del tamaño de la malla h de acuerdo a (4.13). Finalmente, la estimación de error a priori para la velocidad y la temperatura (primera expresión de (4.8)) fácilmente, se sigue combinando (4.16) con (4.7) y las propiedades de aproximación del proyector BDM y el proyector L^2 establecido en (4.5).

Nuestro objetivo es, ahora, derivar la estimación de error a priori para la presión y, de manera similar al caso de la velocidad y la temperatura, el objetivo es acotar apropiadamente el error discreto, $\|\mathbf{e}_p^h\|_{0, \Omega}$ en términos de la proyección del error $\|\mathbf{e}_p^{\Pi}\|_{0, \Omega}$. Para comenzar, notemos de la condición inf-sup discreta (??) con $q_h = \mathbf{e}_p^h$, usando, entonces, que $\mathbf{e}_p^h = \mathbf{e}_p^{\Pi} - \mathbf{e}_p$ y, consecuentemente, empleando la cota (3.14)

para \mathcal{B}^S , encontramos que

$$\begin{aligned}
 \tilde{\beta} \|\mathbf{e}_p^h\|_{0,\Omega} &\leq \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, \mathbf{e}_p^h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}} \leq \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, \mathbf{e}_p^\Pi)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}} + \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, -\mathbf{e}_p)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}} \\
 &\leq \tilde{C}_{\mathcal{B}^S} \|\mathbf{e}_p^\Pi\|_{0,\Omega} + \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, -\mathbf{e}_p)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Ahora, para manejar el segundo término en el lado derecho de la última expresión, usamos la relación de ortogonalidad de Galerkin (4.3) y, después, sumando y restando $\mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}, \mathbf{v}_h)$ se sigue que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, -\mathbf{e}_p) &= -\mathcal{A}_h^S(\mathbf{e}_u, \mathbf{v}_h) - \mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + \mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{D}^S(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{v}_h) \\
 &\leq -\mathcal{A}_h^S(\mathbf{e}_u, \mathbf{v}_h) - \left[\mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \right] - \mathcal{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_u, \mathbf{v}_h) + \mathcal{D}^S(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{v}_h).
 \end{aligned}$$

De esta manera, una aplicación sencilla de las estimaciones (3.11), (3.22) y (3.24) produce

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, -\mathbf{e}_p) &\leq \widehat{C}_{\mathcal{A}^S} \|\mathbf{e}_u\|_{2,\mathcal{T}_h} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} + \widetilde{C}_{S,\text{LIP}} \|\mathbf{e}_u\|_{1,\mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}\|_{1,\mathcal{T}_h} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \\
 &\quad + \widetilde{C}_{S,\text{LIP}} \|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \|\mathbf{e}_u\|_{1,\mathcal{T}_h} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} + \widehat{C}_{\mathcal{D}^S} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{e}_\theta\|_{2,\mathcal{T}_h} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Por lo tanto, después, reemplazando (4.19) en (4.18), simplificando por $\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}$, haciendo mención a las estimaciones a priori (2.24) y (3.27) para \mathbf{u} y \mathbf{u}_h , respectivamente, usando el hecho que $\|\cdot\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq \|\cdot\|_{2,\mathcal{T}_h}$ en $H^2(\mathcal{T}_h)$ y agrupando términos, obtenemos

$$\|\mathbf{e}_p^h\|_{0,\Omega} \leq \tilde{\beta}^{-1} \tilde{C}_{\mathcal{B}^S} \|\mathbf{e}_p^\Pi\|_{0,\Omega} + \tilde{\beta}^{-1} \mathbf{C}_6(\nu, \mathbb{K}, \mathbf{g}, \theta_D) \left[\|\mathbf{e}_u\|_{2,\mathcal{T}_h} + \|\mathbf{e}_\theta\|_{2,\mathcal{T}_h} \right], \tag{4.20}$$

donde

$$\mathbf{C}_6(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) = \max \left\{ \widehat{C}_{\mathcal{A}^S} + \widetilde{C}_{S, \text{LIP}} \left[C_1(\nu, \mathbb{K}, \theta_D, \mathbf{g}) + \widetilde{C}_1(\theta_D, \mathbf{g}) \right], \widehat{C}_{\mathcal{D}^S} \|\mathbf{g}\|_{0, \Omega} \right\}. \quad (4.21)$$

El resultado se sigue, reemplazando (4.20) en (4.7), usando la propiedad de aproximación del proyector L^2 y la estimación para $\|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{2, \mathcal{T}_h} + \|\mathbf{e}_{\theta}\|_{2, \mathcal{T}_h}$ obtenida en la primera parte de la demostración. Otra vez, es claro que la constante que resulta en la estimación del error a priori sólo depende de los datos y otras constantes, pero todas son independientes de h . \square

Capítulo 5

Resultados numéricos

En esta sección se presenta un par de ejemplos que ilustran el buen comportamiento del método de Galerkin completamente no conforme (3.6) construido y analizado en la Sección 3 para aproximar las soluciones del sistema de Boussinesq estacionario (2.3) y para confirmar los radios de convergencia teóricos (4.8) preestablecidas por la teoría, de acuerdo al Teorema 4.1.1.

El primer ejemplo que, a continuación se presenta, es un problema con una solución manufacturada y suave, que considera sólo condiciones de Dirichlet no homogénea para la temperatura mientras que el el tercero, se trabaja en un dominio que involucra condiciones de frontera física, tal como en (2.5); como un caso más general, el cual fue analizado en el presente trabajo.

La implementación computacional fue llevada a cabo por medio del software **FreeFem++** (ver [28]) y el solucionador lineal **UMFPACK** (ver [19]). Los errores experimentales y las tasas de convergencia para el campo vectorial de la velocidad, para la presión y la temperatura, son el resultado de iteraciones basadas en el método de Picard como estrategia de punto fijo sobre una familia de triangulaciones \mathcal{T}_h del dominio respectivo. Este proceso finaliza cuando el error relativo de los coeficientes

5.1. Ejemplo 1: un vórtice en el cuadrado unitario

de dos vectores iterados consecutivos es suficientemente pequeño, esto es:

$$\frac{\|\mathbf{coeff}^{m+1} - \mathbf{coeff}^m\|_{\ell^2}}{\|\mathbf{coeff}^{m+1}\|_{\ell^2}} \leq tol,$$

donde tol es una tolerancia específica y $\|\cdot\|_{\ell^2}$ representa la norma euclidiana ℓ^2 en \mathbb{R}^N con N denotando el número total de grados de libertad definido por la familia de elementos finitos (\mathbf{V}_h, Q_h, W_h) especificada en la Sección 3.0.2 con $k = 1$, esto es, la velocidad \mathbf{u} , la presión p y la temperatura θ son aproximadas mediante los subespacios discretos \mathbf{BDM}_1 , $\mathbb{P}_0(\mathcal{T}_h)$ y $\mathbb{P}_1^{\text{disc}}(\mathcal{T}_h)$, respectivamente, donde el primero corresponde al espacio de elementos finitos Brezzi-Douglas-Marini de primer orden, el segundo, a funciones constantes a trozos y el último a polinomios lineales discontinuos a trozos. En todos los casos, hemos elegido el parámetro de penalización como $a_0 = 5$. Los errores experimentales individuales y los radios de convergencia asociados a cada variable están dados por

$$e(\mathbf{u}) := \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1, \mathcal{T}_h}, \quad e(p) := \|p - p_h\|_{0, \Omega}, \quad e(\theta) := \|\theta - \theta_h\|_{1, \mathcal{T}_h},$$
$$r(\mathbf{u}) := \frac{\log(e(\mathbf{u})/e(\mathbf{u})')}{\log(h/h')}, \quad r(p) := \frac{\log(e(p)/e(p)')}{\log(h/h')}, \quad r(\theta) := \frac{\log(e(\theta)/e(\theta)')}{\log(h/h')},$$

donde h y h' denotan el tamaño de dos mallas consecutivas con sus respectivos errores e y e' .

5.1. Ejemplo 1: un vórtice en el cuadrado unitario

En el primer ejemplo, trabajamos sobre el dominio $\Omega = (0, 1)^2$ y los parámetros físicos $\nu = 1$, $\mathbb{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{g} = (0, -1)^t$. Las soluciones manufacturadas están

5.1. Ejemplo 1: un vórtice en el cuadrado unitario

dadas por

$$\mathbf{u}(x, y) = (\mathbf{u}_1(x, y), \mathbf{u}_2(x, y)), \quad \theta(x, y) = \mathbf{u}_1(x, y) + \mathbf{u}_2(x, y),$$

$$p(x, y) = rs \sin\left(\frac{2\pi(e^{rx} - 1)}{e^r - 1}\right) \sin\left(\frac{2\pi(e^{sy} - 1)}{e^s - 1}\right) \frac{e^{rx+sy}}{(e^r - 1)(e^s - 1)},$$

donde,

$$\mathbf{u}_1(x, y) = \frac{se^{sy}}{2\pi(e^s - 1)} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi(e^{rx} - 1)}{e^r - 1}\right)\right) \sin\left(\frac{2\pi(e^{sy} - 1)}{e^s - 1}\right),$$

$$\mathbf{u}_2(x, y) = \frac{-re^{rx}}{2\pi(e^r - 1)} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi(e^{sy} - 1)}{e^s - 1}\right)\right) \sin\left(\frac{2\pi(e^{rx} - 1)}{e^r - 1}\right),$$

con $r, s > 0$. Aquí, el campo vectorial de velocidad \mathbf{u} es similar a un vórtice en sentido antihorario en un cuadrado unitario cuyas coordenadas dependen de la elección de los parámetros r y s (cf. [14, 38]). En nuestro ejemplo, consideramos $r = 3.5$ y $s = 9.1$ que corresponde a un vórtice ubicado cerca de la esquina superior derecha del dominio. La Tabla 5.1 presenta los errores y los radios de convergencia obtenidos con una tolerancia fija $tol < 1E - 06$. Aquí confirmamos que los errores individuales de todas las variables decrecen de manera óptima con un orden $\mathcal{O}(h)$ y convergencia como la descrita por el Teorema 4.1.1 con $k = 1$ y que las velocidades discretas son de divergencia nula (ver novena columna). En la Figura 5.1 mostramos las líneas de corriente de la velocidad \mathbf{u}_h , la presión p_h y la temperatura θ_h obtenida con una malla para la cual $N = 89920$ correspondiente a los grados de libertad.

5.2. Ejemplo 2: un caso de capa límite

Aproximación de elementos finitos $\mathbf{BDM}_1 - P_0(\mathcal{T}_h) - P_1^{\text{disc}}(\mathcal{T}_h)$									
N	h	$e(\mathbf{u})$	$r(\mathbf{u})$	$e(p)$	$r(p)$	$e(\theta)$	$r(\theta)$	$\ \text{div } \mathbf{u}_h\ _{\infty, \Omega}$	Iter
2064	0.1179	16.5374	-	3.6655	-	17.8977	-	3.0407e-11	11
3648	0.0884	14.0742	0.5606	2.8195	0.9121	14.4985	0.7322	2.5919e-11	5
8160	0.0589	9.8316	0.8848	2.1387	0.6815	9.8172	0.9616	2.6303e-11	6
32448	0.0295	4.3685	1.1937	1.2322	0.8203	4.3631	1.1783	2.4174e-11	32
57600	0.0221	3.1019	1.1902	0.9599	0.8681	3.1290	1.1557	2.2162e-11	17
89920	0.0177	2.3862	1.1711	0.7849	0.9094	2.4276	1.1330	2.2453e-11	8

Cuadro 5.1: Ejemplo 1: Historial de convergencia para el sistema de Boussinesq usando la familia de Galerkin completamente no conforme $\mathbf{BDM}_1 - P_0(\mathcal{T}_h) - P_1^{\text{disc}}(\mathcal{T}_h)$ ($k = 1$).

5.2. Ejemplo 2: un caso de capa límite

Para el siguiente ejemplo, se trabaja con un dominio poligonal $\Omega = (-0.5, 1.5) \times (0, 2)$ y cuyas funciones están dadas por:

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - e^{lx} \cos(2\pi y) \\ \frac{1}{2\pi} l e^{lx} \sin(2\pi y) \end{pmatrix}, \quad p(x, y) = -\frac{1}{2} e^{2lx} - \tilde{p}, \quad \theta(x, y) = x^2 y^2 + 1$$

donde

$$\tilde{p} = \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} -\frac{1}{2} e^{2lx} \right) \quad y \quad l = \frac{-8\pi^2}{\nu^{-1} + \sqrt{\nu^{-2} + 16\pi^2}}$$

De manera similar, se especifica en la siguiente tabla, las tasas de convergencia y errores para cada parámetro de estudio, con respecto al ejemplo de capa límite.

5.2. Ejemplo 2: un caso de capa límite

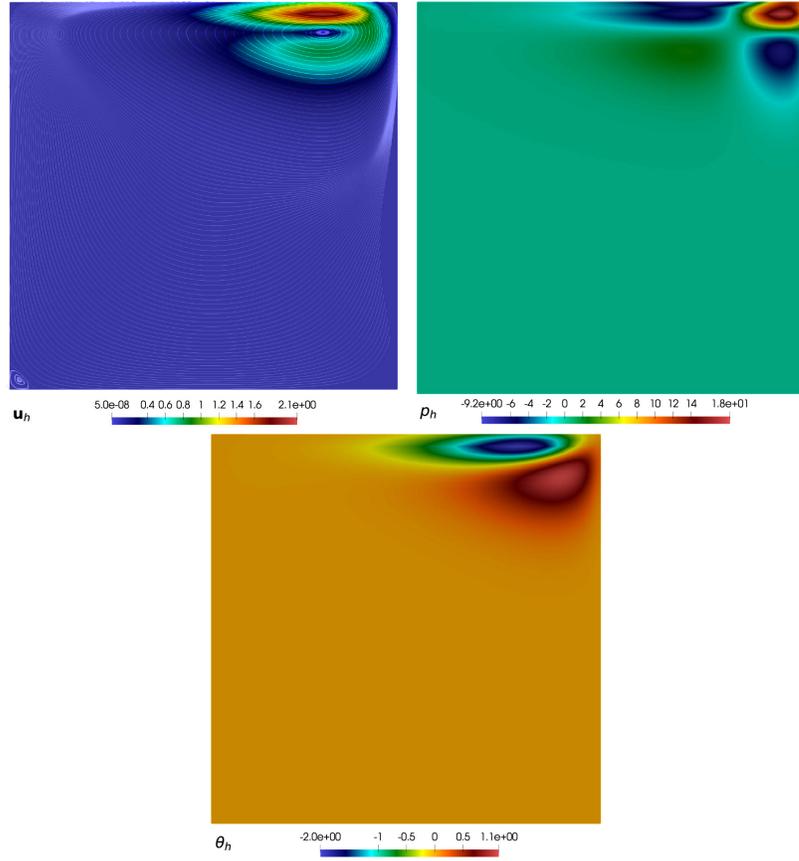


Figura 5.1: Ejemplo 1: Líneas de corriente de la velocidad \mathbf{u}_h , presión p_h y temperatura θ_h del sistema de Boussinesq obtenida con la familia de elementos finitos discontinuos $\mathbf{BDM}_1 - P_0(\mathcal{T}_h) - P_1^{\text{disc}}(\mathcal{T}_h)$ ($k = 1$) y $N = 89920$ grados de libertad.

Aproximación de elementos finitos $\mathbf{BDM}_1 - P_0(\mathcal{T}_h) - P_1^{\text{disc}}(\mathcal{T}_h)$									
N	h	$e(\mathbf{u})$	$r(\mathbf{u})$	$e(p)$	$r(p)$	$e(\theta)$	$r(\theta)$	$\ \text{div } \mathbf{u}_h\ _{\infty, \Omega}$	Iter
268	0.7454	69.2488	-	68.727510	-	2.3310	-	1.2143e-10	10
1110	0.3802	44.2415	0.6655	27.8620	1.3411	1.1940	0.9937	1.0312e-10	14
4278	0.1901	23.2840	0.9261	17.8646	0.6412	0.5908	1.0150	1.4288e-10	10
17040	0.0951	11.3471	1.0376	9.7550	0.8734	0.2923	1.0161	1.5166e-10	18
67792	5.5933	0.5820	1.2096	4.7596	1.2271	0.1517	1.1217	1.5439e-10	34

Cuadro 5.2: Ejemplo 2: Historial de convergencia para el caso de capa límite usando la familia de Galerkin completamente no conforme $\mathbf{BDM}_1 - P_0(\mathcal{T}_h) - P_1^{\text{disc}}(\mathcal{T}_h)$ ($k = 1$).

5.2. Ejemplo 2: un caso de capa límite

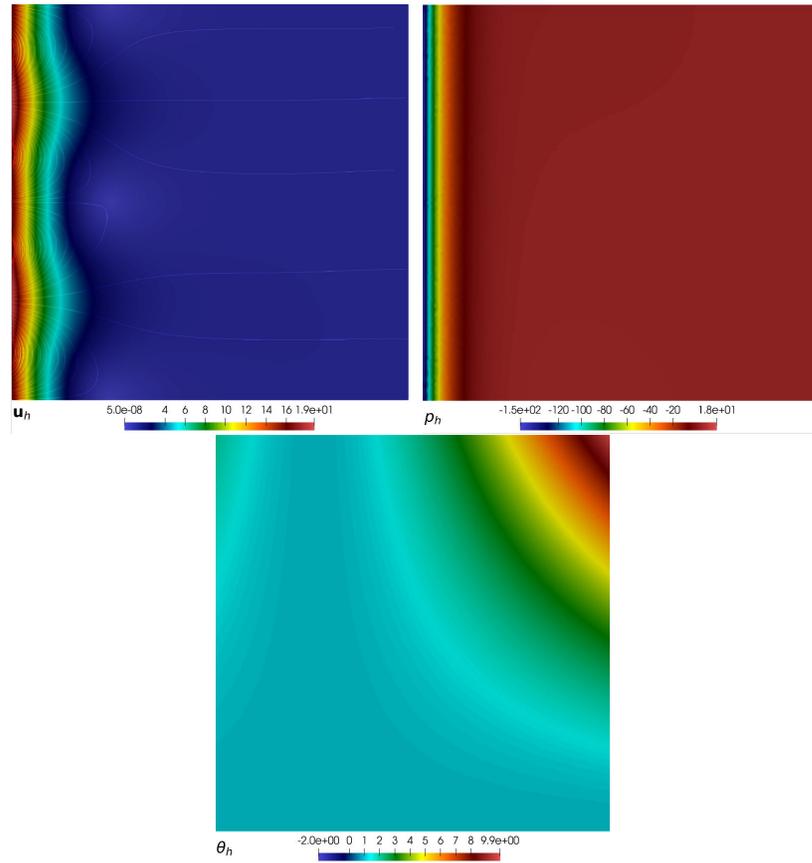


Figura 5.2: Ejemplo 2: Líneas de corriente de la velocidad \mathbf{u}_h , presión p_h y temperatura θ_h para el caso de capa límite con la familia de elementos finitos discontinuos $\mathbf{BDM}_1 - \mathbf{P}_0(\mathcal{T}_h) - \mathbf{P}_1^{\text{disc}}(\mathcal{T}_h)$ ($k = 1$) y $N = 89920$ grados de libertad.

5.3. Ejemplo 3: flujo estacionario en una cavidad cuadrada.

En este ejemplo consideramos un problema de flujo estacionario en el cuadrado unitario $(0, 1)^2$ con condiciones de frontera física

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma, \quad \theta = \begin{cases} 0 & \text{sobre } \Gamma_D^{(1)} \\ 4y(1-y) & \text{sobre } \Gamma_D^{(2)} \end{cases} \quad \text{and} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_N, \quad (5.1)$$

donde la condición de frontera Dirichlet $\Gamma_D = \Gamma_D^{(1)} \cup \Gamma_D^{(2)}$ con

$$\Gamma_D^{(1)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ y } 0 \leq y \leq 1, \text{ or } y = 0 \text{ y } 0 \leq x \leq 1\},$$

$$\Gamma_D^{(2)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1 \text{ y } 0 \leq y \leq 1\},$$

y la condición de frontera Neumann está definida por

$$\Gamma_N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 \text{ y } 0 \leq x \leq 1\}.$$

En este ejemplo, establecemos \mathbb{K} como un tensor identidad, $\nu = 0.5$ y $\mathbf{g} = (0, -1)^t$. Dado que, en este caso, se conoce una solución no analítica, calcularemos los errores y las tasas de convergencia considerando la solución discreta obtenida con una malla más fina. ($N = 273554$) como la solución exacta. En la Tabla 5.3, especificamos los resultados obtenidos para la sucesión de triangulaciones uniformes considerando la familia de elementos finitos discontinuos $\mathbf{BDM}_1 - P_0(\mathcal{T}_h) - P_1^{\text{disc}}(\mathcal{T}_h)$. Una vez más, se observa que la tasa de convergencia $O(h)$ es obtenida para todas las incógnitas, de acuerdo con el Teorema 4.1.1 y que las velocidades discretas son de divergencia nula. Mostramos, por lo tanto, en la Figura 5.3 la velocidad aproximada, la presión y la temperatura. Nuestros resultados coinciden con [38]. Todas las imágenes presentadas

5.3. Ejemplo 3: flujo estacionario en una cavidad cuadrada.

aquí son obtenidas con $N = 67792$ grados de libertad.

Aproximación de elementos finitos $\mathbf{BDM}_1 - P_0(\mathcal{T}_h) - P_1^{\text{disc}}(\mathcal{T}_h)$									
N	h	$e(\mathbf{u})$	$r(\mathbf{u})$	$e(p)$	$r(p)$	$e(\theta)$	$r(\theta)$	$\ \text{div } \mathbf{u}_h\ _{\infty, \Omega}$	Iter
268	0.7454	6.3201	-	5.6810	-	1.0258	-	1.2190e-12	15
1110	0.3802	3.6201	0.8277	4.3212	0.4067	0.5852	0.8337	1.9250e-15	12
4278	0.1901	1.9850	0.8669	2.5850	0.7412	0.3192	0.8749	1.6210e-14	12
17040	0.0951	1.0875	0.8686	1.4652	0.8195	0.1724	0.8888	1.8870e-14	13
67792	0.0530	0.5820	1.0690	0.8789	0.8739	0.1002	0.9279	1.6988e-13	12

Cuadro 5.3: Ejemplo 3: Historial de convergencia para el flujo estacionario en una cavidad cuadrada usando la familia de Galerkin completamente no conforme $\mathbf{BDM}_1 - P_0(\mathcal{T}_h) - P_1^{\text{disc}}(\mathcal{T}_h)$ ($k = 1$).

5.3. Ejemplo 3: flujo estacionario en una cavidad cuadrada.

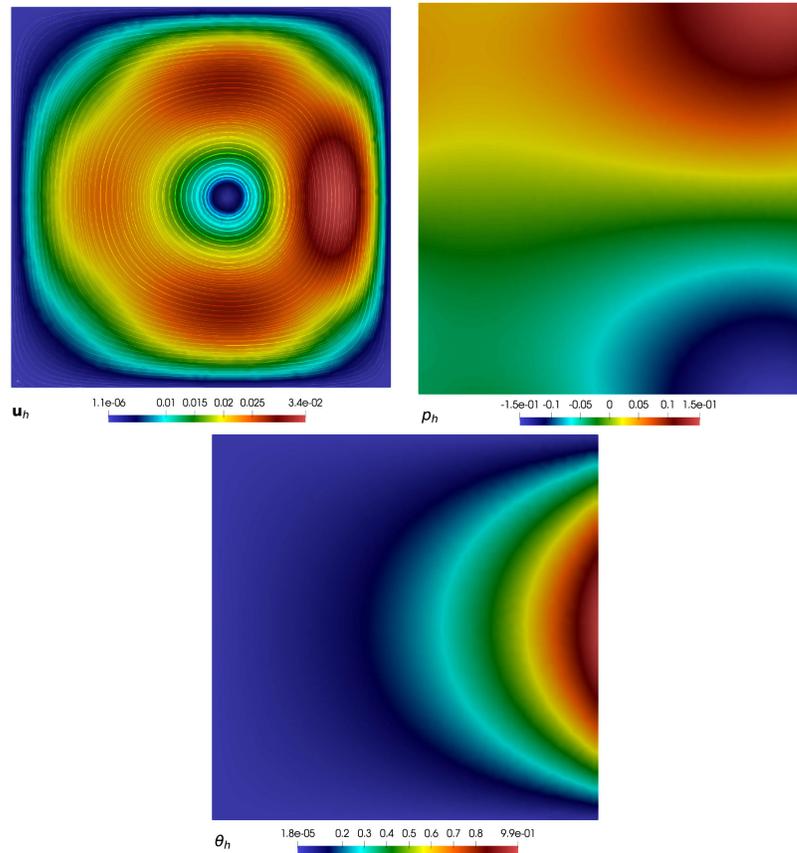


Figura 5.3: Example 3: Líneas de corriente de la velocidad \mathbf{u}_h , presión p_h y temperatura θ_h del flujo estacionario en una cavidad cuadrada obtenida con la familia de elementos finitos discontinuos $\mathbf{BDM}_1 - P_0(\mathcal{T}_h) - P_1^{\text{disc}}(\mathcal{T}_h)$ ($k = 1$) y $N = 89920$ grados de libertad.

Bibliografía

- [1] R.A. ADAMS AND J.J.F. FOURNIER, *Sobolev Spaces*. Second edition. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [2] K. ALLALI, *A priori and a posteriori error estimates for Boussinesq equations*. Int. J. Numer. Anal. Model. 2 (2005), no. 2, 179–196.
- [3] J.A. ALMONACID, G.N. GATICA AND R.OYARZÚA, *A mixed-primal finite element method for the Boussinesq problem with temperature-dependent viscosity*. Calcolo, vol. 55, 3, pp. 1–42, (2018)
- [4] J.A. ALMONACID, G.N. GATICA AND R.OYARZÚA, *A posteriori error analysis of a mixed-primal finite element method for the Boussinesq problem with temperature-dependent viscosity*. Journal of Scientific Computing, vol. 78, 2, pp. 887-917, (2019).
- [5] D. N. ARNOLD, *An interior penalty finite element method with discontinuous elements*. SIAM J. Numer. Anal. 19 (1982), no. 4, 742–760.
- [6] C. BERNARDI, B. MÉTIVET AND B. PERNAUD-THOMAS, *Couplage des équations de Navier-Stokes et de la chaleur: le modèle et son approximation par éléments finis*. ESAIM: Math Model Numer Anal 29, pp. 871–921, (1995).
- [7] J. BOUSSINESQ, *Théorie de lécoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section*, Nabu Press, 2010.

- [8] H. BREZIS, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011. MR 2759829
- [9] F. BREZIS AND M. FORTIN, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, vol. 15, Springer Series of Computational Mathematics, Springer, New York. 1991.
- [10] B. COCKBURN, G. KANSCHAT AND D. SCHÖTZAU, *A locally conservative LDG method for the incompressible Navier-Stokes equations*. Math. Comp. 74 (2005), pp. 1067–1095.
- [11] B. COCKBURN, G. KANSCHAT AND D. SCHÖTZAU, *A note on discontinuous Galerkin divergence-free solutions of the Navier-Stokes equations*. J. Sci. Comp. 31 (2007), 61–73.
- [12] A. ÇIBIK AND K. SONG, *A projection-based stabilized finite element method for steady-state natural convection problem*. J Math Anal Appl 381 (2011), pp 469–484.
- [13] E. COLMENARES, G. N. GATICA AND R. OYARZÚA, *A posteriori error analysis of an augmented mixed-primal formulation for the stationary Boussinesq Problem*. Calcolo 54 (2017), no. 3, 1055-1095.
- [14] E. COLMENARES, G. N. GATICA AND R. OYARZÚA, *A posteriori error analysis of an augmented fully-mixed formulation for the stationary Boussinesq Problem*. Computers & Mathematics with Applications, vol 77, 3, pp. 693-714, (2019).
- [15] E. COLMENARES, G. N. GATICA AND R. OYARZÚA, *An augmented fully-mixed finite element method for the stationary Boussinesq problem*. Calcolo, vol 54, 1 , pp 167-205 (2017).
- [16] E. COLMENARES, G. N. GATICA AND R. OYARZÚA, *Analysis of an augmented mixed-primal formulation for the stationary Boussinesq problem*. Numer. Methods Partial Differ. Equ. 32 (2016), no. 2, 445–478.

- [17] E. COLMENARES, G. N. GATICA AND R. OYARZÚA, *Fixed point strategies for mixed variational formulations of the stationary Boussinesq problem*. C.R. Math. Acad. Sci. Paris 354 (2016), no. 1, 57–62.
- [18] E. COLMENARES AND M. NEILAN, *Dual–mixed formulations for the stationary Boussinesq problem*. Computers & Mathematics with Applications, vol 72. pp. 1828-1850, 2016.
- [19] T.A. DAVIS, *Algorithm 832: UMFPACK V4.3—an unsymmetric-pattern multifrontal method*. ACM Trans. Math. Software 30 (2004), no. 2, 196–199.
- [20] A. ERN AND D. A. DI PIETRO, *Mathematical Apects of Discontinuous Galerkin Methods*, vol. 69 of Mathématiques et Applications, Springer-Verlag, 2012.
- [21] M. FARHLOUL, S. NICAISE AND L. PAQUET *A mixed formulation of Boussinesq equations: analysis of nonsingular solutions*. Math. Comp. 69 (2000), no. 231, 965–986.
- [22] M. FARHLOUL, S. NICAISE AND L. PAQUET *A refined mixed finite element method for the Boussinesq equations in polygonal domains*. IMA Journal of Numerical Analysis 21 (2001), no. 2, 525–551.
- [23] K. J. GALVIN, A. LINKE, L. G. REBHOLZ, N. E. WILSON, *Stabilizing poor mass conservation in incompressible flow problems with large irrotacional forcing and application to thermal convection*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 237-240 (2012), 166-176.
- [24] V. GIRAULT AND P-A. RAVIART, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics, 5. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [25] V. GIRAULT, B. RIVIÈRE AND M. WHEELER, *A discontinuous Galerkin method with nonoverlapping domain decomposition for the Stokes and Navier-Stokes problems*. Math. Comput. 74 (2005), 53-83

- [26] V. GIRAULT AND P.-A. RAVIART, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, vol. 5 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.
- [27] P. HANSBO, AND M. G. LARSON, *Discontinuous Galerkin methods for incompressible and nearly incompressibility elasticity by Nitsche's method*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (2002), 1895-1908.
- [28] F. HECHT, *New development in FreeFem++*. J. Numer. Math. 20 (2012), no. 3-4, 251–265.
- [29] J. HOWELL AND N. WALKINGTON, *Dual-mixed finite element methods for the Navier-Stokes equations*. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis 47 (2013), pp. 789–805.
- [30] J. HOWELL AND N. WALKINGTON, *Dual-mixed finite element methods for the Navier-Stokes equations*. arXiv:1603.09231 [math.NA], (2016)
- [31] LESAINTE AND P.A. RAVIART, *On a finite element method for solving the neutron transport equation*, Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations, de Boor C. (ed.). Academic Press: New York, 1974; 89-145.
- [32] A. LINKE, *Collision in a cross-shaped domain: A steady 2d Navier-Stokes example demonstrating the importance of mass conservation in CFD*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 198 (2009), pp. 3278–3286.
- [33] R. OYARZÚA AND M. SERÓN, *A divergence-conforming DG-mixed finite element method for the stationary Boussinesq problem*. Preprint 2018-21, Centro de Investigacion en Ingenieria Matematica (CI2MA), UDEC, (2018)
- [34] R. OYARZÚA, T. QIN AND D. SCHÖTZAU, *An exactly divergence-free finite element method for a generalized Boussinesq problem*. IMA J. Numer. Anal. 34 (2014), no. 3, 1104-1135.

- [35] R. OYARZÚA AND P. ZUÑIGA, *Analysis of a conforming finite element method for the Boussinesq problem with temperature-dependent parameters*,. Journal of Computational and Applied Mathematics, to appear.
- [36] A. QUARTERONI AND A. VALLI, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, vol. 23 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1994. Theory and algorithms.
- [37] D. J. TRITTON, *Physical Fluid Dynamics*, NeVan Nostrand Reinhold Co., New York, 1977.
- [38] Y. ZHANG, Y. HOU AND H. ZUO. *A posteriori error estimation and adaptive computation of conduction convection problems*. Appl. Math. Model. 35 (2011), 2336-2347.
- [39] C. WALUGA, *Analysis of hybrid discontinuous Galerkin methods for incompressible flow problems*. Ph.D. Thesis, RWTH Aachen, Germany, (2012)